

# 三维分形生长的计算机模拟及其维数\*

## Computer Simulation for Three-dimension Fractal Growth and Its Dimension

庞寿全<sup>1</sup>, 陈乐<sup>2</sup>, 陈洁<sup>1</sup>, 周善东<sup>1</sup>

PANG Shou-quan<sup>1</sup>, CHEN Le<sup>2</sup>, CHEN Jie<sup>1</sup>, ZHOU Shan-dong<sup>1</sup>

(1. 玉林师范学院物理与信息科学系, 广西玉林 537000; 2. 广西师范大学物理与电子工程学院, 广西桂林 541004)

(1. Department of Physics and Information Science, Yulin Teachers' College, Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. College of Physics and Electron Engineering, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要:**按照三维 DLA 模型的规则, 分别在最近邻和次近邻的条件下用计算机模拟凝聚体三维分形生长情况, 采用回转半径法计算三维 DLA 模型的分形维数。结果表明, 近邻条件不同长成了不同的凝聚体外貌, 但三维 DLA 模型有相同的分形维数, 说明凝聚体的分形维数与点阵的结构在小范围粒子数内关系不大。

**关键词:**DLA 模型 分形维数 计算机模拟 回旋半径

**中图分类号:**TP391.9 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-7378(2007)02-0073-03

**Abstract:** According to the rule of three dimensional DLA, this paper uses the computer and simulates the three-dimensional fractal growth under the condition of nearest neighbor and subordinate neighbor, and calculates the fractal dimension of three dimensional DLA with the method of radius of gyration. The result shows that the clusters have the same fractal dimension despite their growth in different nearby conditions and different appearance, which shows that the fractal dimension of cluster is not associated with the structure of lattice in the small range of particle number.

**Key words:** DLA model, the fractal dimension, computer simulating, convoluted radius

自从 Mandebrot<sup>[1]</sup>在 20 世纪 70 年代提出分形(fractal)概念以来, 引起了学者们的广泛关注, 分形是人们在自然界和社会实践活动中所遇到的不规则事物的一种数学抽象。由于分形理论在研究自然界各种复杂现象和非线性系统中的优势, 20 世纪 80 年代以来得到了快速的发展。1981 年, Witten 等<sup>[2,3]</sup>在研究微粒的分形聚集时, 提出了扩散限制凝聚模型(Diffusion Limited Aggregation), 简称为 DLA 模型, 并成功地模拟了空气中的煤灰烟尘和液体中金属粉末的无规则凝聚。DLA 模型已是研究分形生长中最为重要的生长模型之一, 正是由于 DLA 模型

及其他改进模型的成功, 使得人们对分形理论的研究更加深入, 深化了对非线性生长的认识, 并把该理论应用于不同学科和领域。分形维数是表征分形特征的一个重要物理量, 不同生长条件下的分形图形, 其图形及维数往往有较大的差别, 一直以来, 对分形维数的研究是分形研究的重点之一, 随着计算机技术的发展, 分形维数的计算大多采用计算机模拟的方式。通过大量的模拟计算然后采用统计平均的方法求维数。但大多数的研究都是集中在二维平面内不同生长条件下的模拟研究, 如我国学者吴锋民等<sup>[4]</sup>提出了一维随机成核生长模型, 计算机模拟了在不同条件下生成的聚集体图形, 并用不同的方法计算了不同情形下的分形维数; 谢钢等<sup>[5]</sup>利用 DLA 模型计算机模拟了点阴极下金属电沉积过程枝晶二维生长的情形, 研究了粒子移动速度、不同的凝聚核和分形维数的关系。但是大多数的自然分形生长都是在三维空间内进行的, 国内外对于三维分形生长

收稿日期: 2006-08-25

修回日期: 2006-11-14

作者简介: 庞寿全(1967-), 男, 讲师, 主要从事电路理论教学和非线性理论研究工作。

\* 2006 年度广西教育厅自筹经费项目(桂教科研[2006]26 号 No. 222)资助。

及其维数也有研究,但并不多见。比如 P. Meakin<sup>[6]</sup>通过计算机模拟研究了三维分形生长并对其维数进行了计算,但由于当时计算机资源的限制,并没有完全按照 DLA 的模型进行模拟。M. Muthukumar<sup>[7]</sup>在利用平均场的情况下,理论上推导了分形维数的表达式  $D = \frac{d^2 + 1}{d^2 - 1}$ ,其中  $d$  是欧几里德维数(下同); Hentschel<sup>[8]</sup>在利用平均场的条件下,通过一些假设,也推导了分形维数的另一个表达式  $D = \frac{8 + 5d^2}{6 + 5d}$ 。但上述三个方法得出来的结果都没能从较为精确的角度反映三维 DLA 模型分形生长的维数。本文在此基础上,严格按照三维 DLA 模型的规则,分别在最近邻和次近邻的条件下用计算机模拟三维生长的情况,计算在不同的条件下的分形维数。

## 1 模型和模拟方法

### 1.1 模型

三维 DLA 模型如图 1 所示,图 1 中在  $100 \times 100 \times 100$  晶格正中心放置一个种粒子,为生长中心。三维 DLA 模型的最近邻和次近邻如图 2 所示。

在半径为  $r_{\max} = 40$  的球壳上随机产生一个粒子,并让其在晶格内做随机行走(扩散运动),直到运动粒子进入种子的最近邻(或次近邻)并被种子粘附,凝聚成集团的一部分,如图 1 中的 a 粒子。如果粒子走到球体的边界  $R_{\max} = 45$  处,该粒子消失,如图 1 中的 b 粒子。接着在半径为  $r_{\max}$  的球壳的随机位置上产生第二个粒子,并作随机扩散运动。

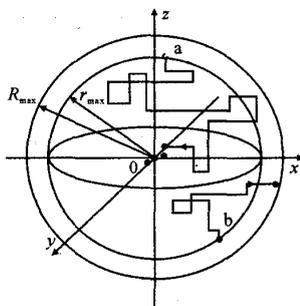


图 1 模型

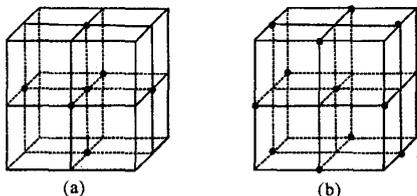


图 2 两种近邻条件

(a)最近邻条件;(b)次近邻条件

重复上述过程,直到所有的粒子释放完毕,最后

会形成以种子为中心的凝聚体。

### 1.2 模拟方法

为了便于比较,我们分别在最近邻和次近邻两种情况下进行模拟,并令粒子粘附的概率为 1;最近邻条件下种子粘附的粒子数最多为 6,凝聚体粒子间的间距取单位长度 1;近邻条件下最多为 12,粒子间的间距为  $\sqrt{2}$ 。

采用回转半径法<sup>[6]</sup>计算三维 DLA 模型分形的维数,其中回旋半径为  $R_g = \sqrt{N^{-1} \sum_{i=1}^N r_i^2}$ ,其中  $N$  是凝聚体的粒子数。由文献<sup>[6]</sup>有  $R_g \sim N^\beta$ ,并且有  $D_\beta = 1/\beta$ ,其中  $D_\beta$  是豪斯多夫分形维数, $\beta$  是  $\ln(R_g) - \ln(N)$  曲线的斜率。通过作出  $\ln(R_g) - \ln(N)$  曲线,求出斜率  $\beta$  就可以得到  $D_\beta$ ,然后分别统计在最近邻和次近邻条件下 50 个凝聚体数据。

## 2 模拟结果及分析

图 3 分别为最近邻和次近邻条件下释放的粒子数同为 30000 时生成的凝聚体。我们可以看出,图 3 (a)图的凝聚体生长粒子数少而密,图 3(b)图的凝聚体生长粒子数多而疏。释放不同的粒子数可以得到不同的凝聚体。

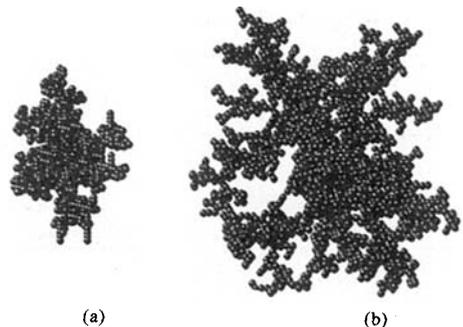


图 3 不同条件下释放 30000 个随机扩散粒子所形成的凝聚体

(a)最近邻条件;(b)次近邻条件

图 4 是根据图 3 做出最近邻和次近邻条件下两种凝聚体的  $\ln(R_g) - \ln(N)$  曲线,可以看出,当  $\ln(N) > 4$ ,即释放的粒子数大于 10000 时候,曲线基本上平直了,此时的凝聚体的  $\ln(R_g) - \ln(N)$  曲线斜率  $\beta$  基本不受凝聚体的大小的影响,保持一致,相应于豪斯多夫维数  $D = \beta^{-1}$  也趋于一个较为稳定的值。

在最邻近的条件下,从 50 个随机形成的、粒子数从 608 到 4829 的凝聚体得到的数据如表 1 所示,我们把每条曲线的斜率  $\beta$  求出,列于表中。从图 4 (a)中可以看出,当  $\ln(N) > 5$  时,也就是凝聚体经

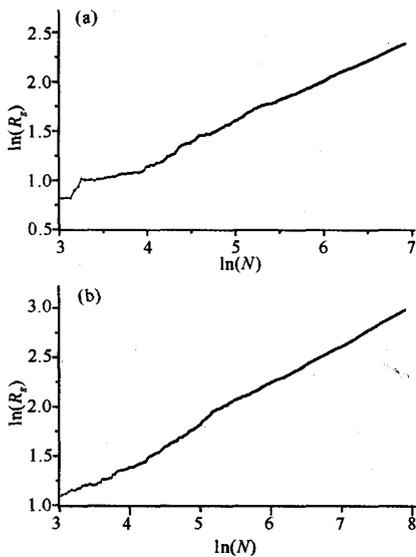


图4 粒子数为30000时凝聚体的 $\ln R_g \sim \ln N$ 曲线  
(a)最近邻条件；(b)次近邻条件

表1 最近邻条件下凝聚体粒子数及其分形维数

统计次数	释放粒子数									
	20000		30000		40000		50000		60000	
	凝聚粒子数 (N)	$\beta$								
1	769	0.3835	1148	0.4011	1815	0.3788	2943	0.4111	4812	0.4150
2	639	0.3965	989	0.3975	1855	0.3802	2778	0.4098	4829	0.3953
3	608	0.4218	1087	0.3875	1707	0.4119	2806	0.4204	4182	0.4077
4	713	0.4228	1098	0.4025	1705	0.4222	2709	0.4090	4235	0.4105
5	746	0.4083	1027	0.3836	1895	0.3844	3195	0.3851	4862	0.4038
6	736	0.3965	801	0.3788	1874	0.4252	3244	0.3936	4290	0.4095
7	752	0.3889	904	0.3996	1939	0.4002	3213	0.3975	4439	0.4090
8	791	0.3850	1055	0.3935	1665	0.4177	2921	0.4186	4828	0.3954
9	702	0.4058	738	0.4014	1901	0.3888	3116	0.4193	4829	0.3979
10	808	0.4086	984	0.4140	1733	0.4133	3078	0.4137	4812	0.4010
平均	726	0.4017 $\pm 0.0116$	983	0.3981 $\pm 0.0088$	1808	0.4035 $\pm 0.0171$	3000	0.4078 $\pm 0.0094$	4617	0.4045 $\pm 0.0058$
分形维数 D	2.4894		2.5119		2.4783		2.4521		2.4178	

表2 次近邻条件下凝聚体的粒子数及其分形维数

统计次数	释放粒子数									
	10000		15000		20000		25000		30000	
	凝聚粒子数 (N)	$\beta$								
1	289	0.3864	578	0.3854	1418	0.4072	1586	0.3852	3039	0.3938
2	282	0.4196	613	0.3863	1309	0.4099	2310	0.4308	3492	0.4024
3	318	0.4037	602	0.3812	1409	0.3941	2254	0.3919	2831	0.3874
4	260	0.4052	570	0.3854	1284	0.3909	1917	0.3966	4020	0.4018
5	329	0.4125	620	0.4127	1098	0.3932	2081	0.4031	2997	0.4000
6	275	0.4123	593	0.4023	1209	0.4164	2222	0.4136	3791	0.4285
7	292	0.4129	628	0.4101	1184	0.4066	2035	0.3914	3323	0.3887
8	299	0.3925	796	0.4176	1070	0.4025	2066	0.4266	3185	0.4090
9	316	0.3996	631	0.4188	1112	0.3938	2317	0.4095	3276	0.4022
10	295	0.4115	630	0.4101	1233	0.3895	2165	0.3924	3610	0.4027
平均	295	0.4056 $\pm 0.0081$	626	0.4009 $\pm 0.0131$	1232	0.4004 $\pm 0.0081$	2095	0.4041 $\pm 0.0128$	3356	0.4016 $\pm 0.0013$
分形维数 D	2.4654		2.4943		2.4975		2.4746		2.4900	

(下转第79页)

过前几百个凝聚粒子之后,  $\ln(R_g) - \ln(N)$  曲线斜率  $\beta$  值基本趋于 0.4, 相应于豪斯多夫维数  $D = \beta^{-1} \approx 2.5$ , 从 50 个凝聚体统计的数据得到豪斯多夫维数为  $D_\beta = 2.481 \pm 0.015$ .

在次近邻条件下模拟的数据如表 2 所示, 其中  $D_\beta = 2.483 \pm 0.011$ . 对比表 1 和表 2, 可以发现, 在释放相同粒子数的情况下, 次近邻条件下种子粘附的粒子数远多于最近邻的情况, 聚集生长更容易, 同时发现, 在相同凝聚粒子数的情况下凝聚体更加粗大。

从上面的不同条件下的模拟结果与 P. Meakin 实验的结果  $D = 2.53 \pm 0.06$  (最近邻情况) 接近但略有偏小, 均没有超过 2.5, 与文献[8]根据平均场理论分别得出的解析表达式  $D = \frac{d^2 + 1}{d + 1}$  和  $D = \frac{8 + 5d^2}{6 + 5d}$  也较为吻合, 当  $d = 3$  时,  $D_H = 2.5$ . 由于 20 世纪 80 年代计算资源的限制, P. Meakin[6] 采用

- [6] 关晓蕾,刘煜伟.一种基于粗糙集的决策树构造方法[J].科技情报开发与经济,2006,16(13):136-137.
- [7] 苗夺谦,王钰.基于粗糙集的多变量决策树构造算法[J].软件学报,1997,8(6):425-430.
- [8] ZIARKO W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1):39-59.
- [9] 王名扬,卫金茂,伊卫国.变精度粗集模型在决策树生成过程中的应用[J].计算机工程与科学,2005,27(1):96-98.
- [10] 常志玲,周庆敏,杨清莲.基于变精度粗糙集的决策树优化算法研究[J].计算机工程与设计,2006,27(17):3175-3177.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第75页)

了当扩散粒子距离种粒子的距离较远时,增大扩散粒子跳动的距离,并且该距离随着扩散粒子离种粒子的距离的增加而成倍增加,且在此模型的基础上采用回转半径法计算分形维数。从模拟的过程中,可以发现粒子跳动的距离将会对分形生长造成较大的影响,显然与真实的情况是有一定出入的,导致了模拟结果只是一个近似值。

在最近邻的条件下,由于粘附的粒子数少且平均半径小,所以生长的难度大,成核粒子数少。在次近邻的情况下,粘附的粒子数多,相对生长容易,在释放粒子数相同的条件下,成核的粒子数多。但是两种情况凝聚体的结构具有稳定且确定的分形维数,生长界面具有多重生长的分形的变化,生长体的半径和粒子数很好地符合幂律关系<sup>[6]</sup>。即使随机扩散粒子的总数从一万到几万变化,按DLA模型生长的分形凝聚体都满足标度不变性和自相似性,其分形维数均在2.48左右,而且在两种不同的点阵中,结果是一致的,这也说明了DLA模型其分形维数与点阵的种类关系不大(在小范围粒子数内),在生长体的内部,空间被占有程度一样,结构致密度也一样。

### 3 结束语

本文建立了三维凝聚生长模型及其近邻条件,并在两种近邻条件下进行了计算机模拟,计算了在不同情形下的分形维数,得出了具有一定意义的结果。尽管近邻条件不同,长成了不同的凝聚体外貌,

但是却有相同的分形维数,这说明凝聚体的分形维数与点阵的关系不大(在小范围粒子数内)。但对于种子粒子的移动和不同生长概率下的情况,还有待进一步的研究。

#### 参考文献:

- [1] MANDELBORT B B. Fractals, form, chance and dimension[M]. San Francisco:Freeman,1977.
- [2] WITTEN T A,SANDER L M. Diffusion-limited aggregation a kinetic critical phenomenon[J]. Phys Rev Let,1981,47:1400.
- [3] WITTEN T A,SANDER L M. Diffusion-limited aggregation[J]. Phys Rev,1983,B27:5686.
- [4] 吴锋民,王衍,吴自勤,等.一维随机成核生长模型[J].物理学报,1996,45(12):1960-1969.
- [5] 谢钢,张郑,陈书荣,等.点阴极下金属电沉积过程枝晶二维生长的计算机模拟[J].科学技术与工程,2003(4):343-346.
- [6] MEAKIN PAUL. Diffusion-controlled cluster formation in 2~6 dimensional space[J]. Phys Rev Lev Let,1983,27:1495-1507.
- [7] MUTHUKUMAR M. Mean-field theory for diffusion-limited cluste formation [J]. Phys Rev Lev Let,1983,14:839-842.
- [8] HENTSCHEL H G E. Fractal dimension of diffusion-limited aggregates[J]. Phys Rev Lev Let,1984,16:212-214.

(责任编辑:韦廷宗)