广西科学院学报 2007,23(3):138~139,143
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 23, No. 3 August 2007

一种B-样条小波的构造*
The Construction of a B-spline Wavelet

栾 丹[1],丁宣浩[2]
LUAN Dan[1], DING Xuan-hao[2]

(1. 渤海大学数学系,辽宁锦州 121000;2. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004)
(1. Department of Mathematics, Bohai University, Jinzhou, Liaoning, 121000, China; 2. School of Mathematics and Computer Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:利用样条函数和多分辨分析构造一类新的样条小波.新构造出的样条小波表达式简单,两尺度序列容易求得.新构造出的小波具有对称性、半正交等优良性质,有利于处理实际问题.

关键词:小波 B-样条 多分辨分析 传递函数 两尺度序列
中图法分类号:O174.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)03-0138-02

Abstract: A kind of B spline wavelet is constructed by using B-spline function and the idea of multi-resolution analysis (MRA). The new method has simple expressions and the two scales equences are easily obtained in addition to many good properties such as symmetry and semi orthogonal, which is propitious to resolving practical problems.

Key words: wavelet, B-spline, multi-resolution analysis, transfer function, two scale sequences

1 基本定义

设$\{V_j\}$是尺度函数$\varphi(x)$生成的一个多分辨分析,相应的小波为$\Psi(x)$,满足两尺度方程

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sum\limits_k p_k\varphi(2x-k)\\ \Psi(x)=\sum\limits_k q_k\varphi(2x-k)\end{cases},\tag{1}$$

方程(1)两边作傅立叶变换得

$$\begin{cases}\hat{\varphi}(\omega)=H(\frac{\omega}{2})\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})\\ \hat{\Psi}(\omega)=G(\frac{\omega}{2})\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})\end{cases}\text{或}$$

$$\begin{cases}\hat{\varphi}(\omega)=P(z)\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})\\ \hat{\Psi}(\omega)=Q(z)\hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})\end{cases},\tag{2}$$

其中,序列$\{p_k\}_{k\in Z}$和$\{q_k\}_{k\in Z}$称为两尺度序列;$P(z)=\frac{1}{2}\sum\limits_k p_kz^k$和$Q(z)=\frac{1}{2}\sum\limits_k q_kz^k$分别为两尺度序列$\{p_k\}_{k\in Z}$和$\{q_k\}_{k\in Z}$的符号,简称为两尺度符号;$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k\in Z}p_ke^{-ik\omega}$和$G(\omega)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k\in Z}q_ke^{-ik\omega}$分别称为尺度函数的传递函数和小波传递函数.它们分别满足方程(1)和(2).矩阵$M(z)=\begin{bmatrix}P(z) & P(-z)\\ Q(z) & Q(-z)\end{bmatrix}$称为两尺度矩阵.

定义1 对于每个正整数m,m阶且具有节点序列Z的基数样条空间S_m是所有函数$f\in C^m(R)$的集合,f在任一区间$(k,k+1)$上的限制是不超过$m-1$次的代数多项式.一阶基数B-样条函数定义为$N_1(x)=\begin{cases}1, x\in[0,1);\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$ m阶基数B-样条$N_m(x)(m\geqslant 2)$定义为$N_m(x)=(N_{m-1}*N_1)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}N_{m-1}(x-t)N_1(t)dt=\int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt$.

由基数B-样条函数的定义可求得其傅立叶变换为

$$\hat{N}_1(\omega)=(\frac{1-e^{-i\omega}}{\omega})=e^{-i\omega/2}\frac{\sin\omega/2}{\omega/2},$$

$$\hat{N}_m(\omega)=[\hat{N}_1(\omega)]^m=(\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega})^m.$$

收稿日期:2007-01-24
修回日期:2007-05-21
作者简介:栾 丹(1977-),女,硕士研究生,主要从事算子理论与小波分析研究.
*广西研究生教育创新计划项目(2006105950701M03)资助.

由两尺度符号表达式 $\hat{N}_m(\omega)=P(z)\hat{N}_m(\omega/2), z=e^{-i\omega/2}$ 得

$$P(z)=\frac{\hat{N}_m(\omega)}{\hat{N}_m(\omega/2)}=2^{-m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}e^{-\frac{ik\omega}{2}},$$

其中 $\binom{m}{k}=C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}$. 从而可得

$$P(z)=1/2\sum_k p_{m,k}e^{-\frac{ik\omega}{2}}=2^{-m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}e^{-\frac{ik\omega}{2}}=>$$

$$p_{m,k}=\begin{cases}2^{-m+1}\binom{m}{k}, 0\leqslant k\leqslant m;\\ 0, 其他.\end{cases}=>$$ 两尺度关系

$$N_m(x)=\sum_{k=0}^{m}2^{-m+1}\binom{m}{k}N_m(2x-k).$$

对于每个 $j\in Z$，定义

$$V_j^m=Clos_{L^2}\{2^{\frac{j}{2}}N_m(2^jx-k);k\in Z\},$$

根据文献[1,2]可知 $\{V_j^m\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析，由文献[1]，称子空间 $W_j^m(j\in Z)$ 为相对于尺度函数 N_m 的小波子空间，而称 V_j^m 为 $L^2(R)$ 的逼近子空间. 众所周知，小波子空间 W_j^m 也是由某个基本小波 $\Psi(x)$ 按照 $N_m(x)$ 生成 V_j^m 的方式生成的，即以 $\{\Psi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\Psi(2^jx-k);k\in Z\}$ 为基生成的.

2　样条小波的构造

2.1　样条小波构造方法

引理 1[3]　给定序列 $\{p_n;n\in Z\}$，$\{q_n;n\in Z\}$，则 $\{\varphi(x-n),\Psi(x-n);n\in Z\}$ 是 V_1 的一个 Riesz 基，如且仅如对于所有的 $|z|=1$，两尺度矩阵 $M(z)$ 是可逆的，即 $\det M(z)\neq 0$.

由引理 1 我们知道要构造的两尺度符号 $Q(z)$ 必须满足两个条件：

(Ⅰ) $A_2\leqslant|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2\leqslant B_2$，$A_2,B_2$ 为两个正常数；

(Ⅱ) $\det M(z)=\begin{vmatrix}P(z) & P(-z)\\ Q(z) & Q(-z)\end{vmatrix}\neq 0.$

根据文献[4]得到传递函数构造样条小波的步骤为：由两尺度方程 $\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$，展开 $H(\omega)$，得到两尺度序列 $\{p_k;k\in Z\}$；构造小波传递函数 $G(\omega)$，直接展开 $G(\omega)$，求出序列 $\{q_k;k\in Z\}$，使得两尺度符号 $q(z)$ 满足对于任意的 $|z|=1$，$\det M(z)=\begin{vmatrix}P(z) & P(-z)\\ Q(z) & Q(-z)\end{vmatrix}\neq 0$；通过取傅立叶逆变换就可得出小波 $\Psi(x)$. 在文献[4]中构造的样条小波需要通过傅立叶逆变换求得其表达式，当求高阶的样条小波时其卷积和导数都难于求得，而本文构造的样条小波选取特殊的 $Q(z)=P(-z)$，这样两尺度序列有明确表达式，不需要求傅立叶逆变换，因此计算简单，具有更大的实用价值.

2.2　构造一个简单样条小波

取尺度函数 $\varphi(x)$ 为二阶 B-样条函数 $N_2(x)$，即

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & 1\leqslant x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

则由两尺度关系式得到 $P(z)=(\frac{1+z}{2})^2$，现取 $Q(z)=P(-z)=(\frac{1-z}{2})^2$，则当 $|z|=1$ 时，有

$$\det M(z)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2^2}(1+z)^2 & \frac{1}{2^2}(1-z)^2\\ \frac{1}{2^2}(1-z)^2 & \frac{1}{2^2}(1+z)^2\end{vmatrix}=\frac{1}{4}[(1+z)^4-(1-z)^4]\neq 0,$$

可见其满足引理 1 的条件.

经计算得相应小波函数为

$$\Psi(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2};\\ -3x+2, & \frac{1}{2}\leqslant x<1;\\ 3x-4, & 1\leqslant x<\frac{3}{2};\\ -x+2, & \frac{3}{2}\leqslant x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

2.3　任意阶样条小波的构造

取尺度函数 $\varphi(x)$ 为一般的 m 阶 B-样条 $N_m(x)$，由两尺度关系式得到 $P(z)=(\frac{1+z}{2})^m$，取 $Q(z)=P(-z)=(\frac{1-z}{2})^m$，则当 $|z|=1$ 时，有

$$\det M(z)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2^m}(1+z)^m & \frac{1}{2^m}(1-z)^m\\ \frac{1}{2^m}(1-z)^m & \frac{1}{2^m}(1+z)^m\end{vmatrix}=\frac{1}{4^m}[(1+z)^{2m}-(1-z)^{2m}]\neq 0,$$

又因为 $A\leqslant|P(z)|^2+|P(-z)|^2\leqslant B$，所以 $A\leqslant|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2\leqslant B$ 也成立. 由等式 $Q(z)=\frac{1}{2}\sum_k q_{m,k}z^k=P(-z)=\frac{1}{2}\sum_k p_{m,k}(-z)^k=\frac{1}{2}\sum_k(-1)^kp_{m,k}z^k$，可知 $q_{m,k}=(-1)^kp_{m,k}=(-1)^k2^{-m+1}\binom{m}{k}$，得到 B-样条小波为

$$\Psi(x)=\sum_{k=0}^{m}q_{m,k}\varphi(2x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2^{m-1}}\binom{m}{k}N_m(2x-k).$$

（下转第143页）

$(\frac{\alpha}{10}+0.55, -\frac{\alpha}{10}+0.75)$, $\widetilde{A}_3(\alpha)=(\frac{7\alpha}{20}+0.1, -\frac{\alpha}{5}+0.65)$.

取 $\lambda=\frac{1}{3}$, 根据(6)式得 $u\left(\alpha,\frac{1}{3}\right)=$

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{7\alpha}{30}-\frac{1}{60}} & e^{-\frac{\alpha}{4}+0.2} \\ e^{\frac{7\alpha}{30}+\frac{1}{60}} & 1 & e^{-\frac{\alpha}{60}+\frac{13}{60}} \\ e^{\frac{\alpha}{4}-0.2} & e^{\frac{\alpha}{60}-\frac{13}{60}} & 1 \end{bmatrix}.$$

显然,矩阵 $U(\alpha,\frac{1}{3})$ 是一致性正互反判断矩阵. 在 α 截集下最大特征根所对应的特征向量为 $w(\alpha,\frac{1}{3})=(1, e^{\frac{7\alpha}{30}+\frac{1}{60}}, e^{\frac{\alpha}{4}-0.2})$. 根据(7)式得 $W(\frac{1}{3})=(1, 1.1438, 0.9302)$. 归一化后得 $W'(\frac{1}{3})=(0.3253, 0.3721, 0.3026)$,从而3个模糊数的优先顺序为 $\widetilde{A}_2 \succ \widetilde{A}_1 \succ \widetilde{A}_3$.

5 结束语

本文针对三角模糊数,通过分析现有的关于模糊数排序的方法,从 α 截集定义左、右优于度着手,构造一致性正互反优于度判断矩阵,根据其最大特征根所对应的规范化特征向量来确定各个模糊数在 α 水平下的排序,最后通过积分确定模糊数的排序. 该指标满足模糊排序方法合理性的5个公理,为模糊数的排序增添了一种计算简便的新方法.

参考文献:

[1] CHEN L, LU H. An approximate approach for ranking fuzzy numbers based on left and right dominance [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 41: 1589-1602.

[2] TRAN L, DUCKSTEIN L. Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130: 331-341.

[3] WANG Y, YANG J, XU D, et al. On the centroids of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 919-926.

[4] RAJ P A D, KUMAR D N. Ranking alternatives with fuzzy weights using maximizing set and minimizing set [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 105: 365-375.

[5] YAO J, WU K. Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 166: 275-288.

[6] CHU T. Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 43: 111-117.

[7] YONG D, ZHU Z, LIU Q. Ranking fuzzy numbers with an area method using radius of gyration[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 51: 1127-1136.

[8] LIU X, HAN S. Ranking fuzzy numbers with preference weighting function expectations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49: 1731-1753.

[9] ASADY B, ZENDEHNAM A. Ranking fuzzy numbers by distance minimization [J]. Applied Mathematical Modelling, 2007, 31(11): 2589-2598.

[10] WANG X, KERRE E E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I) [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118: 375-385.

[11] WANG X, KERRE E E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II) [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118: 387-405.

[12] 王绪柱,单静. 模糊量排序综述[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(4): 28-34.

[13] 郭志林,薛明志. Fuzzy 区间数的一种排序方法及综合评判模型[J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(7): 244-247.

[14] 刘华文. 基于距离测度的模糊数排序[J]. 山东大学学报:理学版, 2004, 39(2): 30-36.

[15] 曾文艺,李洪兴,谷云东. 模糊数的排序方法[J]. 北京师范大学学报:自然科学版, 2001, 37(6): 711-714.

[16] 吴江,黄登仕. 区间数排序方法研究综述[J]. 系统工程, 2004, 22(8): 1-4.

(责任编辑:尹 闯 邓大玉)

(上接第139页)

参考文献:

[1] MALLAT S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$ [J]. Tran Amer Math Soc, 1989, 315: 69-87.

[2] CHUI C K, W J Z. On compactly supported spline wavelet and a duality principle[J]. Tran Amer Math Soc, 1992, 330(2): 903-915.

[3] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安:西安交通大学出版社, 1998.

[4] 杨美香,丁宣浩. 一种新的样条小波的构造[J]. 广西科学院学报, 2006, 22(3): 153-156.

(责任编辑:韦廷宗)