广西科学院学报 2008,24(2):79～83
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 24,No. 2 May 2008

一类四元数矩阵方程的反中心对称解及其最佳逼近*

Anti-centrosymmetric Solutions for Quaternion Matrices Equations and Its Optimal Approximation

于 艳,黄敬频

YU Yan,HUANG Jing-pin

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)

(College of Mathematics and Computer Science,Guangxi University for Nationalities,Nanning,Guangxi,530006,China)

摘要:利用四元数矩阵对的广义奇异值分解,讨论四元数矩阵方程 $AXB=C$ 具有反中心对称解的充要条件,得到解的具体表达式,并应用 Frobenius 范数酉不变性,在该方程的反中心对称解集合中导出与给定相同类型矩阵的最佳逼近解的表达式.

关键词:四元数矩阵方程 广义奇异值分解 Frobenius 范数 反中心对称矩阵 最佳逼近

中图法分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)02-0079-05

Abstract: By using generalized singular value decomposition of quaternion matrices, the necessary and sufficient conditions of the quaternion matrix equation $AXB=C$ having the anti-centro-symmetry solutions are discussed, and the specific expression of the solution is obtained. Meanwhile, by using unitary invariant property of Frobenius norm, the expression of the best approximation solution corresponding with given type of matrices are derived from the anti-centro-symmetry solutions set of this quaternion matrix equation.

Key words: quaternion matrix equation, generalized singular value decomposition, Frobenius norm, anti-centro-symmetry matrix, best approximation

中心与反中心对称矩阵在信息论,线性系统理论,线性估计理论以及数值分析等领域有着重要的应用[1].近年来,人们对复数域上某些类型矩阵方程的中心与反中心对称解及其最佳逼近问题进行讨论,取得了一些相关的研究成果[2~4].1980 年以来,在谢邦杰等人对四元数矩阵理论研究的基础上,四元数矩阵的应用领域得到不断发展[5].最近,姜同松和魏木生[6]给出四元数矩阵对的广义奇异值分解定理,本文利用该技术,在四元数体上讨论矩阵方程 $AXB=C$ 的反中心对称解及其最佳逼近问题,提出并解决如下两个问题.

问题 Ⅰ 已知 $A\in Q^{m\times n}$,$B\in Q^{n\times p}$,$C\in Q^{m\times p}$,求 $X\in ACSQ^{n\times n}$ 满足

$$AXB=C. \tag{1}$$

问题 Ⅱ 给定 $X_0\in ACSQ^{n\times n}$,求 $\widetilde{X}\in L$,使得

$$\|\widetilde{X}-X_0\|_F=\min_{X\in L}\|X-X_0\|_F, \tag{2}$$

其中 L 是方程(1)的解集合.

1 定义

用 R 表示实数域,$Q=\mathrm{R}\oplus\mathrm{R}i\oplus\mathrm{R}j\oplus\mathrm{R}k$ 表示四元数体.$F^{m\times n}$ 表示元素在 F 上所有 $m\times n$ 矩阵的集合.I_n 表示 n 阶单位矩阵,$J_n=\mathrm{sdiag}(1,1,\cdots,1)$ 表示 n 阶次单位矩阵,并且满足 $J_n^2=I_n$,$J_n^{\mathrm{T}}=J_n$.$\|\cdot\|_F$ 表示 Q 上矩阵的 Frobenius 范数,简称 F 范数.A^* 表示矩阵 A 的共轭转置.若 $A,B\in Q^{n\times n}$,则用 $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})$ 表示 A 与 B 的 Hadamard 积.

定义 设 $X=(x_{ij})\in Q^{n\times n}$,如果 X 的元素 x_{ij} 满足 $x_{ij}=-x_{n+1-i,n+1-j}$,$i,j=1,2,\cdots,n$ 则称 X 为 Q 上的反中心对称矩阵.全体 Q 上 n 阶反中心对称

收稿日期:2007-10-30

作者简介:于 艳(1981-),女,硕士研究生,主要从事矩阵计算及应用研究。

*广西自然科学基金项目(2008J32),广西教育厅科研基金项目(2006J26)资助。

矩阵的集合记为 $ACSQ^{n\times n}$.

2 四元数矩阵方程反中心对称解存在条件及通式

对于 $ACSQ^{n\times n}$ 的矩阵 A,易知下列结果成立.

引理1 当 $n=2k$ 时,

$$ACSQ^{n\times n}=\{\begin{bmatrix} G & HJ_k \\ -J_kH & -J_kGJ_k\end{bmatrix}|G,H\in Q^{k\times k}\},$$

当 $n=2k+1$ 时,

$$ACSQ^{n\times n}=\{\begin{bmatrix} G & u & HJ_k \\ -v^{\mathrm{T}} & 0 & v^{\mathrm{T}}J_k \\ -J_kH & -J_ku & -J_kGJ_k\end{bmatrix}|G,H\in Q^{k\times k},u,v\in Q^{k\times 1}\}.$$

引理2 若 $A\in Q^{n\times n}$,则 $A\in ACSQ^{n\times n}\Leftrightarrow A=-J_nAJ_n$.

定理1 设矩阵 $X\in Q^{n\times n}$,则

$$X\in ACSQ^{n\times n}\Leftrightarrow X=P\begin{bmatrix} 0 & X_1 \\ X_2 & 0\end{bmatrix}P^{\mathrm{T}},$$

其中,$X_1\in Q^{(n-k)\times k}$,$X_2\in Q^{k\times(n-k)}$.

当 $n=2k$ 时,$P=P_1$,当 $n=2k+1$ 时,$P=P_2$,且

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_k & I_k \\ J_k & -J_k\end{bmatrix},$$

$$P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_k & 0 & I_k \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ J_k & 0 & -J_k\end{bmatrix}.$$

证明 易证下式成立

$$PP^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}P=I_n, \tag{3}$$

只需证明当 $n=2k$ 时成立,则 $n=2k+1$ 类似可证.

由引理1,不妨设

$$X=\begin{bmatrix} G & HJ_k \\ -J_kH & -J_kGJ_k\end{bmatrix},$$

则

$$P^{\mathrm{T}}XP=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_k & J_k \\ I_k & -J_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} G & HJ_k \\ -J_kH & -J_kGJ_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & I_k \\ J_k & -J_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & G-H \\ G+H & 0\end{bmatrix},$$

令 $X_1=G-H$,$X_2=G+H$,由(3)式必要性得证.

反之,对任意的 $X_1\in Q^{(n-k)\times k}$,$X_2\in Q^{k\times(n-k)}$ 令

$$X=P\begin{bmatrix} 0 & X_1 \\ X_2 & 0\end{bmatrix}P^{\mathrm{T}}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_1+X_2 & (X_2-X_1)J_k \\ J_k(X_1-X_2) & -J_k(X_1+X_2)J_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G & HJ_k \\ -J_kH & -J_kGJ_k\end{bmatrix},$$

其中,$G=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$,$H=\frac{1}{2}(X_1-X_2)$. 易证,$X=-J_nXJ_n$,再由引理2得,$X\in ACSQ^{n\times n}$.

引理3[6] 令 $A\in Q^{m\times n}$,$B\in Q^{p\times n}$,且 $C^*=(A^*,B^*)$,$\mathrm{rank}(C)=r$,则存在酉矩阵 $U\in Q^{m\times m}$,$V\in Q^{p\times p}$ 和非退化矩阵 $Q\in Q^{n\times n}$,使得 $U^*AQ=[\sum_A \quad 0]$,$V^*BQ=[\sum_B \quad 0]$,

其中

$$\sum_A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_A & & \\ & S_A & \\ & & 0_A\end{bmatrix}\begin{matrix} t \\ s \\ r-t-s\end{matrix} \\ \begin{matrix} t & \quad s & \quad r-t-s\end{matrix}\end{array},$$

$$\sum_B=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_B & & \\ & S_B & \\ & & 0_B\end{bmatrix}\begin{matrix} t \\ s \\ r-t-s\end{matrix} \\ \begin{matrix} t & \quad s & \quad r-t-s\end{matrix}\end{array},$$

这里,$t=r-\mathrm{rank}(B)$,$s=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-r$,$S_A=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,$0<\alpha_s\leqslant\cdots\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_1<1$,$S_B=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,$0<\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_s<1$,$\alpha_i^2+\beta_i^2=1$,$i=1,2,\cdots,s$.

引理4 设 $0<a\in\mathrm{R}$,$b_1,b_2\in Q$,则存在唯一的 $x\in Q$,使得 $|x-b_1|^2+|ax-b_2|^2=\min$,此时,$x$ 可以表示为 $x=\frac{b_1+ab_2}{1+a^2}$.

定理2 设 $M,N\in Q^{n\times n}$,$D_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)>0$,$D_2=\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)>0$,则存在唯一的矩阵 $X\in Q^{n\times n}$,使得 $\|X-M\|_F^2+\|D_1XD_2-N\|_F^2=\min$,并且 X 可表示成

$$X=K\circ(M+D_1ND_2), \tag{4}$$

其中,$K=(k_{ij})\in\mathrm{R}^{n\times n}$,$k_{ij}=\frac{1}{1+\lambda_i^2\gamma_j^2}$,$i,j=1,2,\cdots,n$.

证明 令 $M=(m_{ij})\in Q^{n\times n}$,$N=(n_{ij})\in Q^{n\times n}$ 有

$$\|X-M\|_F^2+\|D_1XD_2-N\|_F^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(|x_{ij}-m_{ij}|^2+|\lambda_i\gamma_jx_{ij}-n_{ij}|^2),$$

则

$$\|X-M\|_F^2+\|D_1XD_2-N\|_F^2=\min\Leftrightarrow |x_{ij}-m_{ij}|^2+|\lambda_i\gamma_jx_{ij}-n_{ij}|^2=\min.$$

由引理4知

$$x_{ij}=\frac{m_{ij}+\lambda_i\gamma_jn_{ij}}{1+\lambda_i^2\gamma_j^2},i,j=1,2,\cdots,n,$$

故(4)式成立且 X 唯一.

分两种情况,即 n 分别为偶数和奇数时进行讨论.

(i)$n=2k$ 时,$A\in Q^{m\times 2k},B\in Q^{2k\times p}$,由定理1有

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_k & I_k \\ J_k & -J_k\end{bmatrix}\in Q^{2k\times 2k}, \tag{5}$$

则 $P_1^{-1}=P_1^{\mathrm{T}}$,将 A,B 分块为

$$A=[A_1\quad A_2],B=\begin{bmatrix} B_1\\ B_2\end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中,$A_1,A_2\in Q^{m\times k},B_1,B_2\in Q^{k\times p}$,于是根据引理1,对任意的 $X=\begin{bmatrix} G & HJ_k\\ -J_kH & -J_kGJ_k\end{bmatrix}\in ACSQ^{2k\times 2k}$,$G,H\in Q^{k\times k}$,易知

$$P_1XP_1^{-1}=-\begin{bmatrix} 0 & G-H\\ G+H & 0\end{bmatrix}, \tag{7}$$

四元数矩阵方程(1)等价于

$$AP_1^{-1}(P_1XP_1^{-1})P_1B=C, \tag{8}$$

把(5)式,(6)式,(7)式代入(8)式,并令 $X_1=G+H,Y_1=G-H$,可知(8)式又等价于

$$\overline{A}_1X_1\overline{B}_1+\overline{A}_2Y_1\overline{B}_2=C, \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases}\overline{A}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(A_1-A_2J_k),\\ \overline{A}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(A_1+A_2J_k),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{B}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(B_1+J_kB_2),\\ \overline{B}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(B_1-J_kB_2).\end{cases} \tag{10}$$

显然,$\overline{A}_1,\overline{A}_2\in Q^{m\times k},\overline{B}_1,\overline{B}_2\in Q^{k\times p}$.

(ii)$n=2k+1$ 时,$A\in Q^{m\times(2k+1)},B\in Q^{(2k+1)\times p}$,由定理1有

$$P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_k & 0 & I_k\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ J_k & 0 & -J_k\end{bmatrix}\in Q^{(2k+1)\times(2k+1)}, \tag{11}$$

则 $P_2^{-1}=P_2^{\mathrm{T}}$,将 A,B 分块为

$$A=[A_3\quad A_4],B=\begin{bmatrix} B_3\\ B_4\end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中,$A_3\in Q^{m\times(k+1)},A_4\in Q^{m\times k},B_3\in Q^{(k+1)\times p},B_4\in Q^{k\times p}$,于是根据引理1,对任意的

$$X=\begin{bmatrix} G & u & HJ_k\\ -v^{\mathrm{T}} & 0 & v^{\mathrm{T}}J_k\\ -J_kH & -J_ku & -J_kGJ_k\end{bmatrix},G,H\in Q^{k\times k},u,v\in Q^{k\times 1},$$

易知

$$P_2XP_2^{-1}=-\begin{bmatrix} 0 & 0 & G-H\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}V^{\mathrm{T}}\\ G+H & \sqrt{2}u & 0\end{bmatrix}. \tag{13}$$

四元数矩阵方程(1)等价于

$$AP_2^{-1}(P_2XP_2^{-1})P_2B=C, \tag{14}$$

把(11)式,(12)式,(13)式代入(14)式,并令

$$X_2=[G+H\quad \sqrt{2}],Y_2=\begin{bmatrix} G-H\\ -\sqrt{2}V^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

可知(14)式又等价于

$$\overline{A}_3X_2\overline{B}_3+\overline{A}_4Y_2\overline{B}_4=C, \tag{15}$$

其中

$$\begin{cases}\overline{A}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(A_3\begin{bmatrix} I_k\\ 0\end{bmatrix}-A_4J_k\right),\\ \overline{A}_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(A_3\begin{bmatrix} I_k & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}+A_4[J_k\quad 0]\right),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{B}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} I_k & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}B_3+\begin{bmatrix} J_k\\ 0\end{bmatrix}B_4\right),\\ \overline{B}_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}([I_k\quad 0]B_3-J_kB_4).\end{cases} \tag{16}$$

显然,$\overline{A}_3\in Q^{m\times k},\overline{A}_4\in Q^{m\times(k+1)},\overline{B}_3\in Q^{(k+1)\times p},\overline{B}_4\in Q^{k\times p}$.

因此,求 $X\in ACSQ^{n\times n}$ 满足方程(1)等价于求 $X_1,Y_1\in Q^{k\times k}$ 满足方程(9)或求 $X_2\in Q^{k\times(k+1)},Y_2\in Q^{(k+1)\times k}$ 满足方程(15),也即方程(1)有反中心对称解的充要条件是方程(9)和方程(15)有解.

由于方程(9)与方程(15)类型相同,且问题处理一致,因此只对方程(9),即 $n=2k$ 时进行讨论.

根据引理3,可以设方程(9)中矩阵对$[\overline{A}_1,\overline{A}_2]$的广义奇异值分解为

$$\overline{A}_1=G_1\sum\nolimits_{\overline{A}_1}U_1^{\mathrm{T}},\overline{A}_2=G_1\sum\nolimits_{\overline{A}_2}V_1^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

其中,$G_1\in Q_m^{m\times m}$ 为非退化矩阵,$U_1,V_1\in Q^{k\times k}$ 为酉矩阵,且

$$\sum\nolimits_{\overline{A}_1}=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_{\overline{A}_1} & 0 & 0\\ 0 & S_{\overline{A}_1} & 0\\ 0 & 0 & 0_{\overline{A}_1}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix} r_1\\ s_1\\ t_1-r_1-s_1\\ m-t_1\end{matrix}\\ \begin{matrix} r_1 & s_1 & k-r_1-s_1\end{matrix}\end{array},$$

$$\sum\nolimits_{\overline{A}_2}=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0_{\overline{A}_2} & 0 & 0\\ 0 & S_{\overline{A}_2} & 0\\ 0 & 0 & I_{\overline{A}_2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix} r_1\\ s_1\\ t_1-r_1-s_1\\ m-t_1\end{matrix}\\ \begin{matrix} k+r_1-t_1 & s_1 & t_1-r_1-s_1\end{matrix}\end{array},$$

$t_2=\mathrm{rank}(\overline{A}_1,\overline{A}_2),r_1=t_1-\mathrm{rank}(\overline{A}_2),s_1=\mathrm{rank}(\overline{A}_1)$

$+\mathrm{rank}(\overline{A}_2)-t_1$，$I_{\overline{A}_1}$ 和 $I_{\overline{A}_2}$ 均为单位矩阵，$0_{\overline{A}_1}$，$0_{\overline{A}_2}$ 均为零矩阵，$S_{\overline{A}_1}=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_{s_1})>0$，$S_{\overline{A}_2}=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_{s_1})>0$.

根据引理3，设方程(9)中矩阵对 $[\overline{B}_1^{\mathrm{T}},\overline{B}_2^{\mathrm{T}}]$ 的广义奇异值分解为

$$\overline{B}_1^{\mathrm{T}}=G_2\sum\nolimits_{B_1}U_2^{\mathrm{T}},\overline{B}_2^{\mathrm{T}}=G_2\sum\nolimits_{B_2}V_2^{\mathrm{T}}, \tag{18}$$

其中，$G_2\in Q_p^{p\times p}$ 为非退化矩阵，$U_2,V_2\in Q^{k\times k}$ 为酉矩阵，有

$$\sum\nolimits_{B_1}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc}I_{B_1}&0&0\\0&S_{B_1}&0\\0&0&0_{B_1}\\0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}r_2\\s_2\\t_2-r_2-s_2\\p-t_2\end{array}\\ \begin{array}{ccc}r_2&s_2&k-r_2-s_2\end{array}\end{array},$$

$$\sum\nolimits_{B_2}=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc}0_{B_2}&0&0\\0&S_{B_2}&0\\0&0&I_{B_2}\\0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}r_2\\s_2\\t_2-r_2-s_2\\p-t_2\end{array}\\ \begin{array}{ccc}k+r_2-t_2&s_2&t_2-r_2-s_2\end{array}\end{array},$$

$t_2=\mathrm{rank}(\overline{B}_1^{\mathrm{T}},\overline{B}_2^{\mathrm{T}})$，$r_2=t_2-\mathrm{rank}(\overline{B}_2)$，$s_2=\mathrm{rank}(\overline{B}_1)+\mathrm{rank}(\overline{B}_2)-t_2$，$I_{B_1}$ 和 I_{B_2} 均为单位矩阵，0_{B_1}，0_{B_2} 均为零矩阵，$S_{B_1}=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_{s_2})>0$，$S_{B_2}=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_{s_2})>0$. 再令

$$U_1^{\mathrm{T}}X_1U_2=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&X_{13}\\X_{21}&X_{22}&X_{23}\\X_{31}&X_{32}&X_{33}\end{bmatrix},$$

$$V_1{}^{\mathrm{T}}Y_1V_2=\begin{bmatrix}Y_{11}&Y_{12}&Y_{13}\\Y_{21}&Y_{22}&Y_{23}\\Y_{31}&Y_{32}&Y_{33}\end{bmatrix},$$

$$G_1^{-1}CG_2^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}&C_{24}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}&C_{34}\\C_{41}&C_{42}&C_{43}&C_{44}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

于是，可得问题 I 的解存在条件及解的通式.

定理3 设 $A\in Q^{m\times 2k}$，$B\in Q^{2k\times p}$，$C\in Q^{m\times p}$，且方程(9)中矩阵对 $[\overline{A}_1,[\overline{A}_2]$ 和 $[\overline{B}_1{}^{\mathrm{T}},\overline{B}_2{}^{\mathrm{T}}]$ 的广义奇异值分解为(17)式和(18)式，而 $U_1^{\mathrm{T}}X_1U_2$，$V_1^{\mathrm{T}}Y_1V_2$ 和 $G_1^{-1}CG_2{}^{-\mathrm{T}}$ 按(19)式分块，则四元数矩阵方程(1)有反中心对称解的充要条件是

$$C_{13}=0,C_{14}=0,C_{24}=0,C_{31}=0,C_{34}=0,C_{4i}=0,(i=1,2,3,4), \tag{20}$$

当条件(20)成立时，其通解可表示为

$$L=\{X|X=-P_1^{-1}\begin{bmatrix}0&Y_1\\X_1&0\end{bmatrix}P_1\}, \tag{21}$$

其中 P_1 如(5)式所示，而

$X_1=U_1\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}S_{B_1}^{-1}&X_{13}\\S_{\overline{A}_1}^{-1}C_{21}&X_{22}&X_{23}\\X_{31}&X_{32}&X_{33}\end{bmatrix}U_2^{\mathrm{T}}$，$Y_1=V_1\begin{bmatrix}Y_{11}&Y_{12}&Y_{13}\\Y_{21}&Y_{22}&S_{\overline{A}_2}^{-1}C_{23}\\Y_{31}&C_{32}S_{B_2}^{-1}&C_{33}\end{bmatrix}V_2^{\mathrm{T}}$，$Y_{22}=S_{\overline{A}_2}^{-1}(C_{22}-S_{\overline{A}_1}X_{22}S_{B_1})S_{B_2}{}^{-1}$，$X_{13},X_{22},X_{23},X_{31},X_{32},X_{33},Y_{11},Y_{12},Y_{13},Y_{21},Y_{31}$ 是任意矩阵.

证明 由(17)式，(18)式知，矩阵方程(9)等价于

$$\sum\nolimits_{\overline{A}_1}U_1^{\mathrm{T}}X_1U_2\sum\nolimits_{B_1}^{\mathrm{T}}+\sum\nolimits_{\overline{A}_2}V_1{}^{\mathrm{T}}Y_1V_2\sum\nolimits_{B_2}^{\mathrm{T}}=G_1^{-1}CG_2^{-\mathrm{T}}, \tag{22}$$

将(19)式代入(22)式直接计算得

$$\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}S_{B_1}&0&0\\S_{\overline{A}_1}X_{21}&S_{A_1}X_{22}S_{B_1}+S_{\overline{A}_2}Y_{22}S_{B_2}&S_{\overline{A}_2}Y_{23}&0\\0&Y_{32}S_{B_2}&Y_{33}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}&C_{24}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}&C_{34}\\C_{41}&C_{42}&C_{43}&C_{44}\end{bmatrix},$$

由此可知，方程(1)有反中心对称解即方程(9)有解的充要条件是条件(20)成立，并且有

$X_{11}=C_{11}$，$X_{12}=C_{12}S_{B_1}^{-1}$，$X_{21}=S_{\overline{A}_1}^{-1}C_{21}$，$Y_{23}=S_{\overline{A}_2}^{-1}C_{23}$，$Y_{32}=C_{32}S_{B_2}^{-1}$，$Y_{33}=C_{33}$，$Y_{22}=S_{\overline{A}_2}^{-1}(C_{22}-S_{A_1}X_{22}S_{B_1})S_{B_2}^{-1}$，$\forall X_{22}\in Q^{s_1\times s_2}$.

因此当条件(20)成立时，反中心对称解集合为(21)式.

3 四元数矩阵方程最佳逼近解的表达式

当问题 I 的解集合(21)式中的 L 为非空时，由引理4和定理2，问题 II 存在唯一的逼近解 $\hat{X}$. 对给定的

$$X_0=\begin{bmatrix}G_0&H_0J_k\\-J_kH_0&-J_kG_0J_k\end{bmatrix}\in ACSQ^{2k\times 2k},$$

以及(17)式和(18)式中的酉矩阵，记

$$U_1^{\mathrm{T}}(G_0+H_0)U_2=\begin{bmatrix}G_{11}&G_{12}&G_{13}\\G_{21}&G_{22}&G_{23}\\G_{31}&G_{32}&G_{33}\end{bmatrix},$$

$$V_1^{\mathrm{T}}(G_0-H_0)V_2=\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}&H_{13}\\H_{21}&H_{22}&H_{23}\\H_{31}&H_{32}&H_{33}\end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中(23)式的分块形式分别与(19)式的第一,第二式一致,于是可得定理4.

定理4 设问题Ⅰ的解集合L为非空集合,则在L中存在唯一的

$$\widetilde{X}=-P_1^{-1}\begin{bmatrix}0 & Y_{10}\\ X_{10} & 0\end{bmatrix}P_1, \tag{24}$$

使(2)式成立,即$\widetilde{X}$是问题Ⅱ的最佳逼近解,其中

$$X_{10}=U_1\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}S_{\bar{B}_1}^{-1} & G_{13}\\ S_{\bar{A}_1}^{-1}C_{21} & X_{22}^{*} & G_{23}\\ G_{31} & G_{32} & G_{33}\end{bmatrix}U_2^{\mathrm{T}},Y_{10}=$$

$$V_1\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12} & H_{13}\\ H_{21} & S_{\bar{A}_2}^{-1}(C_{22}-S_{\bar{A}_1}X_{22}^{*}S_{B_1})S_{\bar{B}_2}^{-1} & S_{\bar{A}_2}^{-1}C_{23}\\ H_{31} & C_{32}S_{\bar{B}_2}^{-1} & C_{33}\end{bmatrix}V_2^{\mathrm{T}},$$

$$X_{22}^{*}=\Phi_1\circ[G_{22}+S_{\bar{A}_2}^{-1}S_{\bar{A}_1}^{-1}(S_{\bar{A}_2}^{-1}C_{22}S_{\bar{B}_2}^{-1}-H_{22})S_{B_1}S_{\bar{B}_2}^{-1}], \tag{25}$$

其中$\Phi_1=(\phi_{ij})\in\mathrm{R}^{s_1\times s_2},\phi_{ij}=\dfrac{(b_id_j)^2}{(a_ic_j)^2+(b_id_j)^2}$.

证明 根据引理4和定理2知在L中存在唯一的形如(24)式的$\widetilde{X}$使(2)式成立,为确定$\widetilde{X}$中的X_{10},Y_{10},根据(21)式,(23)式及F范数的酉不变性[7],可得

$$\|X-X_0\|_F^2=\left\|-P_1^{-1}\begin{bmatrix}0 & Y_1\\ X_1 & 0\end{bmatrix}P_1-X_0\right\|_F^2$$

$$=\left\|-\begin{bmatrix}0 & Y_1\\ X_1 & 0\end{bmatrix}-P_1X_0P_1^{-1}\right\|_F^2=$$

$$\left\|\begin{bmatrix}0 & -Y_1\\ -X_1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & G_0-H_0\\ G_0+H_0 & 0\end{bmatrix}\right\|_F^2=$$

$$\|X_1-(G_0+H_0)\|_F^2+\|Y_1-(G_0-H_0)\|_F^2=$$

$$\left\|\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}S_{B_1}^{-1} & X_{13}\\ S_{\bar{A}_1}^{-1}C_{21} & X_{22} & X_{23}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33}\end{bmatrix}-U_1^{\mathrm{T}}(G_0+H_0)U_2\right\|_F^2+\left\|\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13}\\ Y_{21} & Y_{22} & S_{\bar{A}_2}^{-1}C_{23}\\ Y_{31} & C_{32}S_{\bar{B}_2}^{-1} & C_{33}\end{bmatrix}-V_1^{\mathrm{T}}(G_0-H_0)V_2\right\|_F^2=$$

$$\left\|\begin{bmatrix}C_{11}-G_{11} & C_{12}S_{\bar{B}_1}^{-1}-G_{12} & X_{13}-G_{13}\\ S_{\bar{A}_1}^{-1}C_{21}-G_{21} & X_{22}-G_{22} & X_{23}-G_{23}\\ X_{31}-G_{31} & X_{32}-G_{32} & X_{33}-G_{33}\end{bmatrix}\right\|_F^2+$$

$$\left\|\begin{bmatrix}Y_{11}-H_{11} & Y_{12}-H_{12} & Y_{13}-H_{13}\\ Y_{21}-H_{21} & S_{\bar{A}_2}^{-1}(C_{22}-S_{\bar{A}_1}X_{22}S_{B_1})S_{\bar{B}_2}^{-1}-H_{22} & S_{\bar{A}_2}^{-1}C_{23}-H_{23}\\ Y_{31}-H_{31} & C_{32}S_{B_2}^{-1}-H_{32} & C_{33}-H_{33}\end{bmatrix}\right\|_F^2,$$

于是$\|X-X_0\|^2=\min\Leftrightarrow X_{i3}=G_{i3},X_{3i}=G_{3i},Y_{1i}=H_{1i},Y_{i1}=H_{i1},(i=1,2,3)$,且

$$\|X_{22}-G_{22}\|_F^2+\|S_{\bar{A}_2}^{-1}(C_{22}-S_{\bar{A}_1}X_{22}S_{B_1})S_{B_2}^{-1}-H_{22}\|_F^2=\min. \tag{26}$$

再由定理2及(26)式可得唯一的X_{22}^{*}(如(25)式所示),因此(24)式是问题Ⅱ的反中心对称最佳逼近解.

4 结束语

本文定义了四元数体上的反中心对称矩阵,然后利用四元数矩阵对的广义奇异值分解技术,给出了四元数矩阵方程$AXB=C$具有反中心对称解的充要条件及其表达式.同时,运用四元数矩阵的F范数酉不变性,在该方程的反中心对称解集中导出了反中心对称最佳逼近解的表达式.本文结果为求解该类四元数矩阵方程的反中心对称及其最佳逼近问题提供了一种可行的理论及操作方法.

参考文献:

[1] 徐仲,张凯院,陆全.TOEPLITZ矩阵类的快速解法[M].西安:西北工业大学出版社,1999.

[2] 姚国柱.线性流形上$AXB=C$的反中心对称解[J].长沙理工大学学报:自然科学版,2004(Z1):78-83.

[3] 黄敬频.一类矩阵方程的反中心对称最佳逼近解[J].大学数学,2005,21(1):68-73.

[4] 周硕,吴柏生.中心对称与反中心对称矩阵的一类反问题[J].高等学校计算数学学报,2005,27(专辑):52-55.

[5] 李文亮.四元数矩阵[M].长沙:国防科技大学出版社,2002.

[6] Jiang Tongsong, Wei Musheng. Equality constrained least squares problem over quaterion field[J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16: 883-888.

[7] Liu Yonghui. The least-square solutions to the quaternion matrx equation $AXA^{\mathrm{T}}=B$ [J]. Journal of Mathematical Study, 2003, 36(2): 145-150.

(责任编辑:韦廷宗)