2008,24(2):84～85
Vol. 24,No. 2 May 2008

关于$(A+tB)^m$主子式的和的注记*

A Note of Principal Minors Sum of $(A+tB)^m$

朱光艳，刘晓冀
ZHU Guang-yan, LIU Xiao-ji

(广西民族大学数学与计算机科学学院，广西南宁 530006)
(Department of Mathematical and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要：当 A,B 中有一个是正定矩阵，另一个是半正定矩阵时，$(A+tB)^m$ 的主子式的和在 $k=n$（任意 m）和 $m<3$（任意 k,n）这两种情况下是关于 t 的正系数多项式.
关键词：正定矩阵　主子式　对角化
中图法分类号：O151　**文献标识码**：A　**文章编号**：1002-7378(2008)02-0084-02
Abstract: The sum of the $k\times k$ principal minors of the matrix $(A+tB)^m$ is a polynomial with positive coefficients (in t) in the cases of $k=n$ (any m) and $m<3$ (any k,h), when one of matrices A and B is definite and the other is semidefinite.
Key words: positive definite matrix, principal minors, diagonalize

C_n 表示所有 $n\times n$ 的复矩阵组成的集合；k,m,n 是正整数；$X\in C_n$，$S_{k,m,n}(X)$ 记作 X^m 的 k 级主子式的和. 设 $A,B\in C_n$，文献[1～3]讨论了当 A,B 都是正定矩阵时，在(1)$k=n$（任意 m）；(2)$m<3$（任意 k,n）；(3)$n<3$（$k\leqslant n$，任意 m）；(4)$k=1,m<6$（任意 n）；(5)$k=1,m=6,n=3$ 这5种情况下 $S_{k,m,n}(A+tB)$ 是关于 t 的正系数多项式. 本文对文献[1]的结果进行推广，讨论当 A 与 B 中只有一个为正定矩阵，另一个为半正定矩阵时，在 $k=n$（任意 m）和 $m<3$（任意 k,n）这两种情况下，$S_{k,m,n}(A+tB)$ 仍是关于 t 的正系数多项式.

命题1　设 $A,B\in C_n$，若 A 是正定矩阵，B 是半正定矩阵，则多项式

$$S_{n,m}(t)=\det[(A+tB)^m]$$

的次数最多是 nm，其系数全为正数.

证明　$\det[(A+tB)^m]$ 等于 m 个 $\det(A+tB)$ 的乘积，只需证明 $\det(A+tB)$ 即可.

由于 A 是正定矩阵，B 是半正定矩阵，则 A 与 B 可同时相合对角化，即存在非奇异矩阵 $C\in C_n$，使得

$$A+tB=C^*(I+tD_B)C,$$

其中 I 是 n 阶单位矩阵，D_B 为具有非负对角元的对角矩阵[4]. 因此，

$$\det(A+tB)=\det[C^*(I+tD_B)C]=\det(CC^*)\det(I+tD_B),$$

而 $\det(CC^*)>0$，$D_B=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$\det(I+tD_B)=\prod_{i=1}^{n}(1+tb_i)$，其中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $S_{n,m}(t)$ 是系数全为正的多项式.

命题2　设 $A,B\in C_n$，若 A 是半正定矩阵，B 是正定矩阵，则关于 t 的 nm 次的多项式

$$S_{n,m}(t)=\det[(A+tB)^m]$$

的系数全为正数.

证明　与命题1的证明类似，存在非奇异矩阵 C 使得

$$A+tB=C^*(D_A+tI)C,$$

其中 D_A 为具有非负对角元的对角矩阵，令 $D_A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$\det(A+tB)=\det[C^*(D_A+tI)C]=\det(CC^*)\det(D_A+tI),$$

由于 $\det(CC^*)>0$，$\det(D_A+tI)=\prod_{i=1}^{n}(a_i+t)$，所

收稿日期：2007-07-06
作者简介：朱光艳(1980-)，女，硕士研究生，主要从事广义逆理论及应用研究。
* 广西自然科学基金项目(桂科青 06400161)，广西教育厅项目(桂教科研[2005]47号 200507126)和广西高校百名中青年学科带头人资助计划资助。

以$S_{n,m}(t)$为nm次的并且系数全为正的多项式.

当A,B都为正定矩阵时,即有

推论1[1] 若A,B都是$n\times n$的正定矩阵,m为正整数,则关于t的nm次的多项式

$$S_{n,m}(t)=\det[(A+tB)^m]$$

的系数全为正数.

命题3 设$A,B\in C_n$,若A是正定矩阵,B是半正定矩阵,m为小于3的正整数,$0<k\leqslant n$,则多项式

$$S_{k,m}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(A+tB)^m[\alpha]\}$$

的次数最多是km,其系数全为正数.

证明 当$m=1$时,

$$S_{k,1}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(A+tB)[\alpha]\},$$

$A[\alpha]$为正定矩阵的主子矩阵,它为正定矩阵,$B[\alpha]$为半正定矩阵的主子矩阵,它为半正定矩阵.由于$(A+tB)[\alpha]=A[\alpha]+tB[\alpha]$,由命题1的证明知$\det\{(A+tB)[\alpha]\}$等于系数全为正的多项式,则它们的和$S_{k,1}(t)$为系数全为正的多项式.

当$m=2$时,

$$S_{k,2}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(A+tB)^2[\alpha]\},$$

和前面类似,存在非奇异矩阵C使得$A+tB=C(I+tD_B)C^*$,其中I是单位矩阵,D_B为具有非负对角元的对角矩阵.因此有

$$S_{k,2}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(C(I+tD_B)C^*)^2[\alpha]\},$$

通过相似变换,得到

$$S_{k,2}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(C^*C(I+tD_B))^2[\alpha]\},$$

令$L=C^*C,P=I+tD_B$,则$S_{k,2}(t)$可写成

$$S_{k,2}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(LP)^2[\alpha]\}.$$

用Cauchy-Binet公式[4]来计算$(LP)^2$的子式

$$\det\{(LP)^2[\alpha]\}=$$
$$\sum_{|\beta|=k}\det\{(LP)[\alpha,\beta]\det\{(LP)[\beta,\alpha]\}=$$
$$\sum_{|\beta|=k}[\sum_{|\gamma|=k}\det\{L[\alpha,\gamma]\}\det\{P[\gamma,\beta]\}]\times$$
$$[\sum_{|\mu|=k}\det\{L[\beta,\mu]\}\det\{P[\mu,\alpha]\}],\qquad(1)$$

由于P是对角的,只有P的主子式可能不为0,因此只需考虑$\gamma=\beta,\mu=\alpha$.(1)式可简写成

$$\det\{(LP)^2[\alpha]\}=$$
$$\sum_{|\beta|=k}\det\{P[\beta]\}\det\{L[\alpha,\beta]\}\det\{L[\beta,\alpha]\}\det\{P[\alpha]\},$$

由于L是正定的,有

$$\det\{L[\beta,\alpha]\}=\det\{L^*[\beta,\alpha]\}=$$
$$\overline{\det\{L[\alpha,\beta]\}},$$

则

$$\det\{(LP)^2[\alpha]\}=$$
$$\sum_{|\beta|=k}\det\{P[\beta]\}|\det\{L[\alpha,\beta]\}|^2\det\{P[\alpha]\},$$

其中$\det\{P[\beta]\}$和$\det\{P[\alpha]\}$为正系数多项式,所以$\det\{(LP)^2[\alpha]\}$为正系数多项式,它们的和即$S_{k,2}(t)$是系数全为正的多项式.

类似地,有

命题4 设$A,B\in C_n$,若A是半正定矩阵,B是正定矩阵,m为小于3的正整数,$0<k\leqslant n$,则关于t的km次的多项式

$$S_{k,m}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(A+tB)^m[\alpha]\}$$

的系数全为正数.

同样地,当A,B都为正定矩阵时,有

推论2[1] 若A和B都是$n\times n$的正定矩阵,m为小于3的正整数,$0<k\leqslant n$,则关于t的km次的多项式$S_{k,m}(t)=\sum_{|\alpha|=k}\det\{(A+tB)^m[\alpha]\}$的系数全为正数.

参考文献:

[1] Charles R Johnson. Principal minors sums of $(A+tB)^m$[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 411: 386-389.

[2] Johnson C R, Hillar C. Eigenvalues of words in two positive definite letters[J]. SIAMJ Matrix Anal Appl, 2002(23):916-928.

[3] Hillar C, Johnson C R. On the positivity of the coefficients of a certain polynomial defined by two positive definite matrices[J]. J Star Phys, 2005, 118: 781-789.

[4] Horn R, Johnson C R. Matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

(责任编辑:韦廷宗)