广西科学院学报 2008,24(2):86~88
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 24, No. 2 May 2008

一种新的修正不完全 *LU* 分解
A New Kind of Modified Incomplete *LU* Decomposition

石艳超,徐安农
SHI Yan-chao, XU An-nong

(桂林电子科技大学计算科学与数学系,广西桂林 541004)
(Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:提出一种新的修正不完全 *LU* 分解,证明在严格对角占优 *M* 阵和对角元为正的严格对角占优阵下,该分解不仅能够进行下去,而且分解所得的矩阵 *U* 为非奇异阵。

关键词:*LU* 分解 对角占优矩阵 稀疏矩阵 对角元
中图法分类号:O241.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)02-0086-03

Abstract: A new kind of modified incomplete decomposition is presented. It proved that, in the strictly diagonally dominant matrices and the strictly diagonally dominant matrices which diagonal elements are plus, the decomposition can be carried on and the matrix obtains from the decomposition are a non singular matrix.

Key words: *LU* decomposition, strictly diagonally dominant matrices, large sparse matrix, diagonal elements

用预处理迭代法求解大型稀疏的线性方程组

$$Ax = b, A \in \mathrm{R}^{n\times n}, x \in \mathrm{R}^n, b \in \mathrm{R}^n,$$

其基本形式为

$$C(x^{k+1} - x^k) = \omega_k(b - Ax^k), k = 0,1,2,\cdots$$

其中 C 是预处理矩阵,当 A 与 C 均为对称正定阵时,可用Chebyshew方法和共轭梯度法(CG)来加速.因为 A 是稀疏矩阵,为了计算过程中不增加存储空间,减少计算工作量,人们总是希望预处理矩阵 C 保持 A 的稀疏性.在实际中,通常根据 A 的不完全 *LU* 分解和修正不完全 *LU* 分解来选取 C.最为熟悉的是无非零元素填充的不完全三角分解 *ILU*0[1],由于 *ILU*0 保持了矩阵的稀疏结构不变,在应用上非常方便,但是系数矩阵的逼近过于粗糙,局限了 *ILU*0 的有效性.为了提高逼近性,文献[2,3]可以允许非零元素的填充.文献[4]中的不完全 *LU* 分解为有非零元素填充的情况,但是文献[4]中不完全 *LU* 分解不一定能够进行下去。本文通过对文献[4]的研究,得出消去修正过程不中断的条件是 $a_{kk}^{(k)} \neq 0, k = 1,2,\cdots,n-1$,并且得出在严格对角占优 M 阵下,分解所得到的矩阵 U 是非奇异的.同时证明了在对角元为正的严格对角占优阵条件下,修正不完全 *LU* 分解不仅能进行下去,而且得到的矩阵 U 也为非奇异阵.

1 定义及引理

文中关于矩阵的有关定义参阅文献[4].

设 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 是一给定的矩阵,令

$$J_n = \{(i,j) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\},$$
$$D_A = \{(i,j) \in J_n \mid a_{ij} \neq 0\},$$

其中 J 是 J_n 中含有 D_A 的子集,对 $k = 1,2,\cdots,n-1$.记新的修正不完全 *LU* 分解法为 *MILU*(Ⅱ).修正不完全 *MILU*(Ⅱ)分解法计算公式为

$$\begin{cases} l_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}, \\ a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}, (i,j) \in J; \\ a_{ik}^{(k)} - l_{ik}a_{ik}^{(k)} + \sum\limits_{p\in J(k,j)} |a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)}|, (i,j) \notin J \text{ 且 } i \neq j; \end{cases} \end{cases}$$

其中 $i = k+1,\cdots,n$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$.对于严格对角占优 M 阵,可以证明 *MILU*(Ⅱ)分解不仅存在,而且是正规的,从而相应的迭代法收敛.

引理 1 若 A 是 $n\times n$ 阶的严格对角占优 M 阵,$A^{(1)}$ 是对 A 的第一列进行高斯消元后得到的矩

收稿日期:2007-07-30
修回日期:2007-10-26
作者简介:石艳超(1983-),女,硕士研究生,主要从事数值计算研究。

阵,则 $A^{(1)}$ 也是严格对角占优 M 阵.

引理 2　若 A 是 $n\times n$ 阶 M 阵,C 是将 A 的某些非对角元素置为零后得到的矩阵,则 C 是 M 阵.

引理 3　若 A 是 $n\times n$ 阶 M 阵,$D\geqslant 0$ 是对角阵,则 $A+D$ 仍为 M 阵.

引理 1 和引理 2 的证明参阅文献[5].

2　主要结论

定理 1　若 A 是 $n\times n$ 阶的严格对角占优 M 阵,则对任一非零指标集 J,$MILU$(Ⅱ)分解产生的分裂 $A=LU-R$ 是正规的,其中 $L=(l_{ij})$,$U=(u_{ij})$,$R=(r_{ij})$ 满足关系式

$l_{ij}=0,u_{ij=0},(i,j)\notin J;$

$r_{ij}=0,(i,j)\in J.$

证明　设 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})$,$\widetilde{A}^{(k)}=(\widetilde{a}_{ij}^{(k)})$,$L_k=(l_{ij}^{(k)})$,$R^{(k)}=(r_{ij}^{(k)})$,则 A 的分解过程如下:

对 $K=1,2,\cdots,n-1$,

$A^{(1)}=A,$

$\widetilde{A}^{(k+1)}=L_kA^{(k)},$

$A^{(k+1)}=\widetilde{A}^{(k+1)}+R^{(k+1)},$

其中 $R^{(k+1)}$ 定义为

$$r_{ij}^{(k+1)}=\begin{cases}0,(i,j)\in J,j\neq i;\\ l_{ik}a_{kj}^{(k)},(i,j)\notin J,k+1\leqslant i,j\leqslant n;\\ \sum\limits_{\substack{p=k+1,\\(i,p)\notin J}}^{n} l_{ik}a_{kp}^{(k)},j=i,k+1\leqslant i,j\leqslant n.\end{cases}$$

而 L_k 定义为:除对角线元素全为 1 外,仅第 k 列为 $[0,\cdots,0,1,-a_{k+1}^{(k)}/a_{kk}^{(k)},\cdots,-a_{nk}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}]$,其余元素均为 0. 由上面的分解过程,可得到如下结论:

(1)$\widetilde{A}^{(k+1)}$ 是由 $A^{(k)}$ 经高斯消去第 k 列的下三角部分后得到的矩阵,由引理 1 知,若 $A^{(k)}$ 是严格对角占优 M 阵,则 $A^{(k)}$ 也是严格对角占优 M 阵.

(2)$A^{(k+1)}$ 是令 $\widetilde{A}^{(k+1)}$ 的某些非对角元为零,并在其主对角元上加上某一正数后得到的矩阵,由引理 2 与引理 3 可知,若 $\widetilde{A}^{(k+1)}$ 是严格对角占优 M 阵,则 $A^{(k+1)}$ 也是严格对角占优 M 阵.

因 $A^{(k)}=A$ 是严格对角占优 M 阵,由结论(1)、(2) 可推知,$A^{(k+1)}$ 与 $\widetilde{A}^{(k+1)}$ 是严格对角占优 M 阵. 特别,$A^{(n)}$ 是上三角形的严格对角占优 M 阵,并且在其上三角部分中,凡是下标不属于指标集 J 的元素均为零.

(3)$R^{(k+1)}\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n-1)$.

(4)$(L_k)^{-1}$ 除对角元素为 1 外,仅在第 k 列中有非零元素,$L_k\geqslant 0$,且有

$(L_1)^{-1}R^{(2)}=R^{(2)},$

$(L_1)^{-1}(L_2)^{-1}R^{(3)}=R^{(3)},$

……

$(L_1)^{-1}\cdots(L_{n-1})^{-1}R^{(n)}=R^{(n)}.$

因此有

(i)$U=A^{(n)}=(L_{n-1},L_{n-2},\cdots,L_1)(A^{(1)}+R^{(2)}+\cdots+R^{(n)})$,其中 $R=R^{(2)}+\cdots+R^{(n)}\geqslant 0$;

(ii)$L=(L_{n-1},L_{n-2},\cdots,L_1)^{-1}=I+\widetilde{L}_1+\cdots+\widetilde{L}_{n-1}$,其中 $\widetilde{L}_i$ 是 $(L_i)^{-1}$ 的严格下三角部分.

由(i),(ii) 知,L,U,R 的元素满足定理 1 的结论. 另外由于 $(LU)^{-1}=U^{-1}(L_{n-1},\cdots,L_1)\geqslant 0$,所以分解 $A=LU-R$ 是正规的,即 A 的 $MILU$(Ⅱ)分解是正规的.

定理 2　若 A,U,L,R 均如定理 1 中一样定义,则对任意初值 x_0,迭代法

$LUx_{k+1}=Rx_k+b,(k\geqslant 0),$

将收敛于 $Ax=b$ 的解,其中 L,U 是 A 的 $MILU$(Ⅱ)分解因子.

证明　由文献[2]的定理 3.13 可以知道,定理 2 成立.

定理 3　设 $A=(a_{ij})\in \mathrm{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优 M 阵,则由消去过程产生的矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是严格对角占优 M 阵,而且有 $a_{ii}^{(k)}>a_{ii}^{(k+1)}>0,i=1,2,\cdots,n$.

证明　用数学归纳法.

由 $A_1=A$ 知,$k=1$ 时,A_1 是严格对角占优的 M 阵,假设 A_k 是严格对角占优的 M 阵. 下面证明 A_{k+1} 也是严格对角占优的 M 阵.

由于 A_{k+1} 与 A_k 的前 k 行完全相同,而 A_{k+1} 又是具有

$$A_{k+1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)}\\ 0 & A_{22}^{(k+1)}\end{pmatrix}$$

所示的形状,故只需证明 A_{k+1} 的右下角的 $(n-k)\times(n-k)$ 子矩阵

$$A_{22}^{(k+1)}=\begin{pmatrix}a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & a_{k+1,k+2}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)}\\ a_{k+2,k+1}^{(k+1)} & a_{k+2,k+2}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+2,n}^{(k+1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,k+1}^{(k+1)} & a_{n,k+2}^{(k+1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k+1)}\end{pmatrix}$$

是严格对角占优的 M 阵即可.

$$|a_{ii}^{(k+1)}|-\sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}}^{n}|a_{kj}^{(k+1)}|=|a_{ii}^{(k)}-l_{ik}a_{ki}^{(k)}|+\sum_{p\in p(k,i)}^{n}|a_{ip}^{(k)}-l_{ik}a_{kp}^{(k)}|-\sum_{\substack{j=i+1,\\(i,j)\in p}}^{n}|a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)}|\geqslant$$

$$|a_{ii}^{(k)}|-|l_{ik}a_{ki}^{(k)}|-\sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}}^{n}|l_{ik}a_{ij}^{(k)}|-\sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}}^{n}|a_{ij}^{(k)}|+\sum_{p\in p(k,i)}^{n}|a_{ip}^{(k)}-l_{ik}a_{kp}^{(k)}|=|a_{ii}^{(k)}|-\sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}}|a_{ij}^{(k)}|-$$

$$\sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}} |l_{ik}a_{kj}^{(k)}| - |l_{ik}a_{ki}^{(k)}| + \sum_{p\in p(k,i)} |a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)}| = |a_{ii}^{(k)}| - \sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}} |a_{ij}^{(k)}| + \sum_{p\in p(k,i)} |a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)}| - \frac{|a_{ik}^{(k)}|}{a_{kk}^{(k)}}\Big(\sum_{\substack{j=k+1,\\p\in p(k,i)}} |a_{kj}^{(k)}| + |a_{ki}^{(k)}|\Big) \geqslant |a_{ii}^{(k)}| - \sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}} |a_{ij}^{(k)}| - \frac{|a_{ik}^{(k)}|}{|a_{kk}^{(k)}|}|a_{kk}^{(k)}| + \sum_{p\in p(k,i)} |a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)}| = |a_{ii}^{(k)}| - \sum_{\substack{j=k+1,\\(i,j)\in p}} |a_{ij}^{(k)}| - |a_{ik}^{(k)}| + \sum_{p\in p(k,i)} |a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)}| > 0 + \sum_{p\in p(k,i)} |a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)}| > 0,$$

由此可知 $A_{22}^{(k+1)}$ 为严格对角占优 M 阵，且知 $a_{nn}^{(n)} > 0$，故分解能进行下去，并且分解得到的矩阵 U 是非奇异阵.

定理 4 若 A 是对角元为正的严格对角占优矩阵，矩阵 $\widetilde{A}$ 是与 A 相关的严格对角占优 M 阵，则对任意相同的非零指标集 J，A 与 $\widetilde{A}$ 的 $MILU$(Ⅱ)分解

$$A = L\sum U - R = C - R, \sum = \mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n);$$

$$\widetilde{A} = \widetilde{L}\widetilde{\sum}\widetilde{U} - \widetilde{R} = \widetilde{C} - \widetilde{R}, \widetilde{\sum} = \mathrm{diag}(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_n)$$

有如下关系：

(1) $0 \leqslant \tilde{\sigma} \leqslant \sigma_i, i = 1,2,\cdots,n$;

(2) $\tilde{l}_{ij} \leqslant -|l_{ij}| \leqslant 0, (j,i)\in J, j = i+1,\cdots,n$;

(3) $\tilde{u}_{ij} \leqslant -|u_{ij}| \leqslant 0, (j,i)\in J, j = i+1,\cdots,n$.

证明 由 $MILU$(Ⅱ)分解计算公式可得

$\tilde{\sigma}_i = \tilde{a}_{ii}^{(r+1)}, \sigma_i = a_{ii}^{(r+1)}$;

$\tilde{u}_{ij} = \tilde{a}_{ii}^{(r+1)}, u_{ij} = a_{ij}^{(r+1)}$;

$\tilde{l}_{ir} = \tilde{a}_{ir}^{(r)}/\tilde{a}_{rr}^{(r)}, l_{ir} = a_{ir}^{(r)}/a_{rr}^{(r)}$.

对 r 用数学归纳法，易证明定理 4 成立.

定理 5 A 与 $\widetilde{A}$ 均如定理 3 中一样定义，则有

$$\rho(C^{-1}R) \leqslant \rho(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{R}) < 1,$$

其中 $\rho(A)$ 是矩阵 A 的谱条件数.

证明 由定理 1 可知，$\widetilde{A} = \widetilde{L}\widetilde{\sum}\widetilde{U} - \widetilde{R} = \widetilde{C} - \widetilde{R}$ 是正规分裂，故 $\rho(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{R}) < 1$，从而只需证明 $\rho(C^{-1}R) \leqslant \rho(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{R})$，即只需要证明 $|C^{-1}R| \leqslant \widetilde{C}^{-1}\widetilde{R}$ 即可.

首先证明 $|C^{-1}| \leqslant \widetilde{C}^{-1}$，其中 $C = L\sum U$，$\widetilde{C} = \widetilde{L}\widetilde{\sum}\widetilde{U}$. 令 $L = I - L^0$，$U = I - U^0$，$\widetilde{L} = I - L'$，$\widetilde{U} = I - U'$，其中 L^0，L' 均为严格下三角阵，其中 U^0，U' 均为严格上三角阵.

由于 $0 < \tilde{\sigma}_i < \sigma_i, \tilde{l}_{ji} \leqslant -|l_{ji}| \leqslant 0, \tilde{u}_{ij} \leqslant -|u_{ij}| \leqslant 0$，所以 $|L^0| \leqslant L'$，$|U^0| \leqslant U'$，$\sum^{-1} \leqslant \widetilde{\sum}^{-1}$，而

$$|L^{-1}| = |(I - L^0)^{-1}| = |I + L^0 + \cdots + (L^0)^{n-1}| \leqslant I + L' + \cdots + (L')^{n-1} = (I - L')^{-1} = (\widetilde{L})^{-1}.$$

同理可证 $|U^{-1}| \leqslant \widetilde{U}^{-1}$，因此有 $|C^{-1}| \leqslant (\widetilde{C})^{-1}$.

其次再证明 $|R| \leqslant \widetilde{R}$.

因 $0 \leqslant |R|, 0 \leqslant \widetilde{R}$，故只需证明 $|r_{ij}^{(k+1)}| \leqslant \tilde{r}_{ij}^{(k+1)}$，其中 $k = 1,2,\cdots,n$. 事实上，

当 $(i,j) \in J \cap (j \neq i)$ 时，$r_{ij}^{(k+1)} = \tilde{r}_{ij}^{(k+1)} = 0$.

当 $(i,j) \notin J \cap (j \neq i), k+1 \leqslant i,j \leqslant n$ 时，

$r_{ij}^{(k+1)} = l_{ik}a_{kj}^{(k)}, \tilde{r}_{ij}^{(k+1)} = \tilde{l}_{ik}\tilde{a}_{kj}^{(k)} |r_{ij}^{(k+1)}| \leqslant |l_{ik}||a_{kj}^{(k)}| \leqslant \tilde{l}_{ik}\tilde{a}_{kj}^{(k)} = \tilde{r}_{ij}^{(k+1)}$.

当 $j = i$ 时，

$$r_{ii}^{(k+1)} = \sum_{\substack{p=k+1,\\(i,p)\notin J}}^{n} l_{ik}a_{kp}^{(k)}, \tilde{r}_{ij}^{(k+1)} = \sum_{\substack{p=k+1,\\(i,p)\notin J}}^{n} \tilde{l}_{ik}\tilde{a}_{kp}^{(k)} |r_{ii}^{(k+1)}| \leqslant \sum_{\substack{p=k+1,\\(i,p)\notin J}}^{n} |l_{ik}||a_{kp}^{(k)}| \leqslant \sum_{\substack{p=k+1,\\(i,p)\notin J}}^{n} \tilde{l}_{ik}\tilde{a}_{kp}^{(k)} = \tilde{r}_{ii}^{(k+1)}.$$

综上所述，可得 $|C^{-1}R| \leqslant \widetilde{C}^{-1}\widetilde{R}$，因此 $\rho(C^{-1}R) \leqslant \rho(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{R})$.

定理 5 说明，将 $MILU$(Ⅱ)分解应用于对角元为正的严格对角占优阵 A，产生的分解 $A = C - R$ 对应于解 $Ax = b$ 的迭代法收敛.

参考文献：

[1] Chen Greif, James Varah. Itertive solution of cyclically reduced systems arising from discrimination of the three-dimensional convection-diffusion equation [J]. SIAM Sci Comput, 1998, 19(6): 1018-1040.

[2] Azevedo E D, Forsyth F, Tang W. Towards a cost effective ILU preconditioner with high level fill [J]. BIT, 1992, 31: 442-436.

[3] Young D, Melvin R, Johnson F. Applications of sparse matrix solvers as effective preconditioners [J]. SIAM J Sci Statist Comput, 1989(10): 1186-1199.

[4] 徐树方. 矩阵计算的理论与方法[M]. 北京：北京大学出版社，1995: 169-176.

[5] Verga R S. Matrix iterative analysis [M]. New York: Prenitice-Hall, 1962.

（责任编辑：韦廷宗）