广西科学院学报 2008,24(3):165～167
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 24,No. 3 August 2008

基于蒙特卡罗方法的极大重置看涨期权定价*
The Pricing for the Maximum Reset Call Option Based on Monte Carlo Methods

何芳丽[1],杨善朝[2]
HE Fang-li[1],YANG Shan-chao[2]

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004;2. 广西师范大学数学系,广西桂林 541004)
(1. School of Mathematics and Computing Science,Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:将极值期权和重置期权组合得到新的极值重置期权后,在常利率模型下,用蒙特卡罗方法对极值重置期权的极大重置看涨期权进行近似定价.

关键词:期权 极值重置期权 定价 蒙特卡罗方法
中图法分类号:O211.6,F830.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)03-0165-03

Abstract: By combining the extremum opions with reset options, an new kind of options, the extremum reset options is formed. Then, under the constant interest rate model, the approximate price of the maximum reset call option is obtained by Monte Carlo methods.

Key words: option, extremum reset option, price, Monte Carlo methods

随着金融市场的发展,如何构造出新的期权以满足不断变化的市场投资需要是期权理论研究的一个重点.期权是风险管理的核心工具.要对风险进行有效的管理,就必须对期权进行正确的定价,所以确定期权的公平价格非常重要.

近年来,国际金融衍生市场上除了交易人们广为熟悉的标准欧式期权和美式期权外,还涌现出比标准欧式或美式看涨期权和看跌期权盈亏状态更复杂的衍生证券,即奇异期权.奇异期权是由标准期权变化、组合、派生出来的新品种.极值期权和重置期权都是奇异期权.极值期权的合约中规定有 n 种可能选择:以敲定价 K,购买风险资产 $S^i(i=1,2,\cdots,n)$ 的权利,期权持有人在合约的到期日选择表现最佳的一种,使实施的效益达到极大.重置期权是当原生资产价格达到某一预先给定的水平时,按合约规定,将重新设定敲定价格,以使持有人有更多的获利机会.这两类奇异期权都受到众人的青睐,而且到目前已经得到了很多的研究[1~4],不管是在常利率模型下还是在随机利率模型下,这两类期权的定价问题都得到了显示解.我们将极值期权和重置期权组合得到一种奇异期权,并称之为极值重置期权.极值重置期权可以分为:极大重置看涨期权,极大重置看跌期权,极小重置看涨期权,极小重置看跌期权.

本文在常利率模型下,利用蒙特卡罗方法[5]对极大重置看涨期权进行近似定价.

1 极大重置看涨期权的金融背景和定义

1.1 金融背景

由于极值重置期权既具有极值期权的特征又具有重置期权的特征,所以它具有非常好的金融意义.就极大重置看涨期权来说,它的金融背景可以是:某投资者看中两种发展形势都很好的股票,如果他不想买两个看涨期权,就可以选择一个极大值期权,即他在合约的到期日选择表现最佳的一种,使实施的效益达到极大;另外,他又估计到这两种股票价格可

收稿日期:2007-06-22
作者简介:何芳丽(1979-),女,讲师,主要从事金融统计研究工作。
* 国家自然科学研究基金项目(10161004),广西自然科学基金项目(04047033)资助。

能在期权有效期内的某个时间会有大幅度的下跌，而且这个下跌对期权到期的收益造成很大的影响，那么为了避免这个影响他就可以在这个时间将原敲定价进行一次重置，所以这个投资者最后想买的一个期权就是一个极大与重置结合的看涨期权，即极大重置看涨期权.

1.2 定义

设期权的到期日是 T，重置时刻点 $t_0 \in [0,T]$，原敲定价是 K(即 $K_1 = K_2$). 关于两资产 S^1 和 S^2 的极值重置看涨期权为：在 t_0 时刻，当 $\max\{S_{t_0}^1, S_{t_0}^2\} < K$ 时(其中，$S_{t_0}^i$ 表示在 t_0 时刻资产 i 的价格，$i = 1,2$)，重置敲定价为 $\max\{S_{t_0}^1, S_{t_0}^2\}$，否则敲定价不改变，从而此期权到期日的现金流量(或到期价值)V 是：

$$V = (\max\{S_T^1, S_T^2\} - K)^+ \cdot I(\max\{S_{t_0}^1, S_{t_0}^2\} > K) + (\max\{S_T^1, S_T^2\} - \max\{S_{t_0}^1, S_{t_0}^2\})^+ I(\max\{S_{t_0}^1, S_{t_0}^2\} \leqslant K), \quad (1)$$

其中，$I(x)$ 是示性函数. 这样，由风险中性理论知，期权在时刻 $t \in [0,T]$ 的价值函数就是期权到期现金流量 V 在 t 时刻的价值贴现，即

$$C_{\max,t}^{t_0;K} = e^{-r(T-t)}E(V), \quad (2)$$

其中，$C_{\max,t}^{t_0;K}$ 表示重置时间在 t_0，原敲定价为 K 的极大重置看涨期权在 t 时刻的价值，r 是无风险利率。

2 极大重置看涨期权的近似定价

2.1 基本假设

假设：(Ⅰ)市场是风险中性的；(Ⅱ)市场无风险利率 r 与两种资产 S^1 和 S^2 的价格波动率 σ_1 和 σ_2 在期权有效期内为已知的常数；(Ⅲ)在风险中性测度 P 下，S^1 和 S^2 服从几何布朗运动

$$dS^i(t) = rS^i(t)dt + \sigma_i S^i(t)dW_t^i, (0 \leqslant t \leqslant T, i = 1,2), \quad (3)$$

其中 r 是资产期望回报率，σ_1 和 σ_2 分别是资产 S^1 和 S^2 的波动率，度量收益的标准偏差，随机过程 $\{W_t^i, 0 \leqslant t \leqslant T\}, i = 1,2$ 是 (Ω, F, P) 上的布朗运动，$dW^1(t)$ 和 $dW^2(t)$ 的瞬间相关系数 ρ 为常数。

在(Ⅰ)的假设下，资产的期望回报率就等于无风险利率. 将(3)式使用 Itô 定理，则对任意的 $t \in [0,T]$，有

$$S_T^i = S_t^i \exp\{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})(T-t) + \sigma_i W_{T-t}^i\}, \quad (4)$$

其中 $W_{T-t}^i = W_T^i - W_t^i$.

2.2 近似定价方法

将 $[0,T]$ 分为 m 个时间段，即出现了 $m+1$ 个时间点，则每段的时间长度是 T/m，设为 τ. 若某个股票(或资产)的价格 S 服从几何布朗运动，则在每两个相连的时间点上有

$$S(k+1) = S(k) \cdot \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma\sqrt{\tau} \cdot \varepsilon\}, \quad (5)$$

其中，$k = 0,1,\cdots,m-1$；$\varepsilon \sim N(0,1)$，$S(k)$ 为股票在 k 处的价格.

利用(5)式，只要从单变量标准正态分布中把 ε 的值给抽样出来，就可以得到股票在 $[0,T]$ 内每个时间点上价格. 将(5)式利用到极大重置看涨期权上，考虑到 S^1 和 S^2 的瞬间相关系数是 ρ，所以样本的产生可以首先从单变量标准正态分布中抽取两个独立的样本 x_1 和 x_2，然后令 $\varepsilon_1 = x_1$，$\varepsilon_2 = \rho x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$，则 ε_1 和 ε_2 就是我们所需要的样本. 有了样本之后，利用公式

$$S_{k+1}^1 = S_k^1 \cdot \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)\tau + \sigma_1\sqrt{\tau} \cdot \varepsilon_1\}, \quad (6)$$

$$S_{k+1}^2 = S_k^2 \cdot \exp(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2)\tau + \sigma_2\sqrt{\tau} \cdot \varepsilon_2\} \quad (7)$$

得到两个股票(或资产)在 $[0,T]$ 上每个时间点的价格，然后利用(1)式就可以知道未定权益在 T 时刻的值，再将这个值贴现到初始时刻，即(2)式中 $t = 0$，就得到了一个期权值 V_1 了. 将上面的过程重复 n 次，就得到 n 个值，最后将这 n 个值取算术平均就得到极大重置看涨期权的价格估计值 $\bar{V}$(即普通蒙特卡罗方法下的期权值).

为了提高估计值的精确性，我们引入控制变量

$$\bar{V}^* \triangleq e^{-r(T-t)}E(\max\{S_T^1, S_T^2\} - K)^+, \quad (8)$$

即用一个极大看涨期权作为控制变量，且此时的极大看涨期权价格可以近似的表示为 $\bar{V}_c \triangleq \bar{V} + c \times (v^* - \bar{V}^*)$，其中，$c$ 为任意常数，v^* 和 $\bar{V}^*$ 分别是极大看涨期权在初始时刻价格的精确值和模拟值. 易知引入的控制变量与要求的期权正相关，为方便起见，将控制变量方法中的参数 c 取为 1. 由于极大看涨期权是有显示的定价公式的，即 $v^* \triangleq e^{-rT}EY^*$ 已知，在求 V_1 的同时，就利用(8)式将 V_1^* 也求出来，当我们把 $\bar{V}$ 求出来的同时也把 $\bar{V}^*$ 给求出来，最后将它们的值代入 $\bar{V}_c \triangleq \bar{V} + 1 \times (v^* - \bar{V}^*)$ 就得到控制变量蒙特卡罗方法下的期权价格 $\bar{V}_c$.

2.3 数值模拟结果与分析

令 $n = 10000$，$m = 720$. 当利率 r 变动，$K = 110$，$t_0 = 1$，$T = 2$，$S_0^1 = 100$，$S_0^2 = 100$，$\sigma_1 = 0.2$，

$\sigma_2=0.3,\rho=0.2$ 时，就可以从表 1 期权价格看到，极大重置看涨期权的价格和其它看涨期权的价格变化趋势一样，都是随着利率的变大而变大，而且不管利率怎么变化，极大重置看涨期权的价格都会比其它几个看涨期权的价格要大. 当重置时间 t_0 变动，$K=110,T=2,S_0^1=100,S_0^2=100,\sigma_1=0.2,\sigma_2=0.3,\rho=0.2,r=0.05$ 时，就可以从表 2 的期权价格看到，极大重置看涨期权的价格和一般重置看涨期权的价格变化趋势也是一样的，都是随着重置时间的推后(或变大)而变小，但是不管重置时刻在哪里，极大重置看涨期权的价格都是比一般的重置期权价格要大. 当相关系数 ρ 变动，$K=110,t_0=1,T=2,S_0^1=100,S_0^2=100,\sigma_1=0.2,\sigma_2=0.3,r=0.05$ 时，就可以从表 3 的期权价格看到，随着两资产的相关系数的变动，极大重置看涨期权和极大看涨期权的价格也在变动，都是随着相关系数的变大而变小，而且极大重置看涨期权的价格都会比极大看涨期权的价格大.

总的来说，极大重置看涨期权的价格具有一般期权的特征，另外它的价格又比其它一般的看涨期权的价格要大，这主要是因为它同时具有“极大”和“重置”的特点，它的获利机会比其它一般期权的获利机会大. 另外，从表 1～3 的结果可以发现我们用的蒙特卡罗方法的效果不错，尤其是在控制变量的蒙特卡罗方法下，其误差比较小(0.028～0.055)，这说明我们所寻找的控制变量是很好的.

表 1 利率 r 变动时的看涨期权价格*

利率 r	极大重置看涨期权		极大看涨期权	S_2 的重置看涨期权	S_1 的重置看涨期权
	普通蒙特卡罗方法	控制变量蒙特卡罗方法			
0.05	27.1362 (0.3332)	26.7099 (0.0528)	24.3642	20.8357	14.6736
0.1	32.9831 (0.3519)	33.0440 (0.0462)	31.00905	24.9854	19.2957
0.15	39.7154 (0.3645)	39.5223 (0.0370)	38.1097	29.4065	24.4266
0.2	45.7290 (0.3670)	46.0091 (0.0289)	45.0606	34.0011	29.8594

* 括号内的数值为标准误差.

表 2 重置时间变动时的看涨期权价格*

重置时间 t	极大重置看涨期权		S_2 的重置看涨期权	S_1 的重置看涨期权
	普通蒙特卡罗方法	控制变量蒙特卡罗方法		
0.5	27.2537 (0.3338)	27.4031 (0.0558)	21.0832	15.1846
1	27.1362 (0.3332)	26.7099 (0.0528)	20.8357	14.6736
1.5	26.0165 (0.3212)	26.0843 (0.0427)	19.9531	13.7740

* 括号内的数值为标准误差.

表 3 相关系数变动时的看涨期权价格*

相关系数 ρ	极大重置看涨期权		极大看涨期权
	普通蒙特卡罗方法	控制变量蒙特卡罗方法	
−0.3	27.9623 (0.3228)	28.5178 (0.0446)	26.6008
−0.2	28.4448 (0.3286)	28.3208 (0.0480)	26.2133
−0.1	27.4695 (0.3250)	27.9230 (0.0480)	25.8086
0	27.1560 (0.3268)	27.5286 (0.0496)	25.3288
0.1	27.0164 (0.3250)	27.2285 (0.0526)	24.8815
0.2	27.1362 (0.3332)	26.7099 (0.0528)	24.3642
0.3	26.3626 (0.3288)	26.2642 (0.0543)	23.7967

* 括号内的数值为标准误差.

3 结束语

本文寻找到了一种新的期权，即极值重置期权，并以两资产的极大重置看涨期权为例，在常利率模型下，用蒙特卡罗方法对其定价问题进行了较有效的近似定价，避免了复杂的计算. 另外，为了使模型更接近实际情况，可以对本文模型进行推广，如考虑利率是随机情况，考虑分红情况等，对推广之后的模型，也是可以用蒙特卡罗方法做近似定价.

参考文献：

[1] Johnson H. Options on the maximum or the minimum of several assets [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22(3): 277-283.

[2] Stultz. Option on the minimun or the maximum of two risk assets: analysis and applications [J]. Journal of Financial Economics, 1982(10): 161-182.

[3] 陈松男. 金融工程学[M]. 上海：复旦大学出版社，2002: 255-269.

[4] 王莉君，张曙光. 随机利率下重置期权的定价问题[J]. 高校应用数学学报：A 辑，2002, 17(4): 471-478.

[5] 约翰·赫尔. 期权、期货和衍生证券[M]. 张陶伟，译. 北京：华夏出版社，2003: 325-328.

(责任编辑：邓大玉)