广西科学院学报 2008,24(3):171～173,176
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 24,No. 3 August 2008

NA 样本情形线性指数分布参数的经验 Bayes 估计*

The Empirical Bayes Estimation for the Parameter of Linear Exponential Distribution in the Case of NA Samples

薛婷婷[1],韦程东[2],陈志强[2]
XUE Ting-ting[1],WEI Cheng-dong[2],CHEN Zhi-qiang[2]

(1. 佳木斯大学理学院,黑龙江佳木斯 154007;2. 广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530001)
(1. College of Natural Science, Jiamusi University, Jiamusi, Heilongjiang, 154007, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要:利用同分布负相协(NA)样本构造密度函数及其导数的核估计,得到线性指数分布参数的经验 Bayes(EB)估计,并给出 EB 估计在适当条件下的收敛速度.
关键词:线性指数 NA 样本 经验 Bayes 估计 收敛速度
中图法分类号:O213.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)03-0171-03
Abstract: Density function and kernel estimation its derivative is constructed by using the negatively associated (NA) samples, and the empirical bayes estimation of linear exponential distribution has been derived, it is shown that the convergence rate of EB estimation are established under suitable conditions.
Key words: linear exponential, NA samples, empirical Bayes estimation, convergence rate

1955 年,Robbins H[1]提出经验 Bayes(EB)方法. 如今,EB 估计问题的研究已进经取得较大的进展,比如文献[2]讨论连续型单参数指数族中参数的 EB 估计问题. 文献[3]讨论一类离散分布参数的 EB 估计问题. 文献[4]讨论线性指数分布参数的经验 EB 估计. 然而,在可靠性理论,渗透理论和某些多元统计分析问题中,随机样本往往不是 i. i. d. 的,而是具有一定相关性,如负相协(NA)和正相协(PA)样本就是常见的两种. 本文在同分布 NA 样本情形下,讨论线性指数分布参数的 EB 估计问题. 文中 $c, c_1, c_2, \cdots$ 表示常数,在不同的地方可以取不同的值,即使是在同一个表达式中也是如此.

1 预备知识

定义 1.1 r. v. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 称为 NA 的,如果对于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任何两个不交的非空子集 A_1 与 A_2,都有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i, i \in A_1), f_2(X_j, j \in A_2)) \leqslant 0, \tag{1.1}$$

其中 f_1, f_2 是任何两个使得协方差存在,而且对每个变元均非降(或同时对每个变元均非升)的函数. 称 r. v. 列 $\{X_j, j \in \mathrm{N}\}$ 是 NA 的,如果对任何自然数 $n \geqslant 2, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是 NA 的[5].

考虑模型[6]:随机变量 X 的条件概率密度为

$$f(x|\theta) = (\mu x + \theta)\exp(-\theta x - \frac{1}{2}\mu x^2), \tag{1.2}$$

θ 为参数.

假定 $\mu > 0$ 为已知常数. 样本空间为 $x \in \Omega =$

收稿日期:2007-10-16
修回日期:2008-03-07
作者简介:薛婷婷(1978-),女,硕士,讲师,主要从事概率论与数理统计,贝叶斯统计决策理论研究工作.
*广西自然科学基金项目(0575051),广西教育厅科研项目资助。

$\{x|x>0\}$,参数空间为 $\Theta=\{\theta>0:\int_{\Omega}f(x|\theta)\mathrm{d}x=1\}$. 设参数 θ 的先验分布为 $G(\theta)$,假定 $G(\theta)$ 有密度 $\mathrm{d}G(\theta)=g(\theta)\mathrm{d}\theta$, 其先验分布族为 $\theta=\forall\{G:\int_{\Theta}|\theta|^{\delta}\mathrm{d}G(x)<\infty$,其中 $\delta\geqslant 1\}$.

设随机变量 X 的边缘分布

$$f(x)=\int_{\Theta}f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\int_{\Theta}(\mu x+\theta)\exp(-\theta x-\frac{1}{2}\mu x^2)\mathrm{d}G(\theta), \quad (1.3)$$

并设

$$p_G(x)=\int_{\Theta}\exp(-\theta x-\frac{1}{2}\mu x^2)\mathrm{d}G(\theta), \quad (1.4)$$

又由于

$$p_G^{(1)}(x)=-\int_{\Theta}(\mu x+\theta)\exp(-\theta x-\frac{1}{2}\mu x^2)\mathrm{d}G(\theta)=-f(x).$$

故有 $\int_x^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=p_G(x)$,其中 $p_G^{(1)}(x)$ 表示 $p_G(x)$ 的一阶导数.

取损失函数为

$$L(\theta,a)=(\theta-a)^2, \quad (1.5)$$

在平方损失函数(1.5) 下,θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_B(x)=E(\theta)|x)=\int_{\Theta}\theta f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)/f(x)=[\mu p_G(x)-f^{(1)}(x)]/f(x)-\mu x=\varphi_B(x)-\mu x, \quad (1.6)$$

其中 $\varphi_B(x)=[\mu P_G(x)-f^{(1)}(x)]/f(x)$, 此处 $f^{(1)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的一阶导数. 约定当 $\hat{\theta}_B(x)$ 的分母为零时,$\hat{\theta}_B(x)=0$. 于是 $\hat{\theta}_B(x)$ 的 Bayes 风险为

$$R_G=E_{(x,\theta)}(\hat{\theta}_B(x)-\theta)^2. \quad (1.7)$$

假定 $G(\theta)$ 未知,因此 $\hat{\theta}_B(x)$ 也是未知的,无实用价值,故本文采用经验 Bayes(EB) 方法.

1.1 NA 样本下 EB 估计的构造

首先利用同分布 NA 样本构造概率密度函数及其导数的核估计,然后利用这一结果构造 EB 估计.

设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是同分布弱平稳 NA r. v. 列,方差有限. 设 $f(x)$ 为 r. v. X_1 的概率密度函数,并对其分布做假定:

(A) $f(x)\in C_{s,\alpha}$, $x\in R^1$,

其中 $C_{s,\alpha}$ 表示 R^1 中的一族概率密度函数,其 s 阶导数连续,且绝对值不超过 α, $s>1$ 为正整数.

对 NA 序列的协方差做假定:

(B) $\sum_{j=1}^{\infty}|\mathrm{Cov}(X_1,X_j)|\leqslant c<\infty$.

采用核估计方法,令 $s>1$ 为任意确定的自然数,$K_i(x)(i=0,1,\cdots,s-1)$ 是 Borel 可测的有界函数,在(0,1) 区间外为零,且满足条件:

(i) 对 $i=0,1,\cdots,s-1$,有

$$\frac{1}{t!}\int_0^1 u^t K_i(u)\mathrm{d}u=\begin{cases}1, t=i,\\ 0, t\neq i, t=0,1,\cdots,s-1.\end{cases}$$

(ii) $K_i(x)$ 在 R^1 是可微的,且 $\sup_x|K'_i(x)|\leqslant c<\infty$.

记 $f^{(0)}(x)=f(x)$ 为 X_1 的概率密度函数,$f^{(i)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的第 i 阶导数. 对 $i=0,1,\cdots,s-1$,定义 $f^{(i)}(x)$ 的核估计[2] 为

$$f_n^{(i)}(x)=\frac{1}{nh_n^{1+i}}\sum_{j=1}^{n}K_i(\frac{X_j-x}{h_n}),$$

其中 $0\leqslant h_n\to 0(n\to\infty$ 时),$f_n(x)=f_n^{(0)}(x)$ 为 $f(x)$ 的核估计. 由文献[2],可以找到适合条件的核函数 $K_i(x)$.

又由于 $p_G(x)=\int_x^{\infty}f(y)\mathrm{d}y=E\{I_{(X_i>x)}\}$,因此 $p_G(x)$ 的估计量定义为

$$p_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{(X_i>x)}. \quad (1.8)$$

令 $\hat{\varphi}_n(x)=[\frac{\mu p_n(x)-f_n^{(1)}(x)}{f_n(x)}]_{n^v}$, $0<v<1$ 待定,为 $\varphi_B(x)$ 的估计,这里 $[b]_L=\begin{cases}b,|b|\leqslant L,\\ 0,|b|>L,\end{cases}$ 可定义 θ 的 EB 估计为

$$\hat{\theta}_n(x)=\hat{\varphi}_n(x)-\mu x=[\frac{\mu p_n(x)-f_n^{(1)}(x)}{f_n(x)}]_{n^v}-\mu x. \quad (1.9)$$

记 E_* 表示对 $(X_1,X_2,\cdots,X_n,(X,\theta))$ 联合分布求均值,E_n 表示对 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布求均值,那么 $\hat{\theta}_n(x)$ 的全面 Bayes 风险为

$$R_n=R_n(\hat{\theta}_n(X),G)=E_*(\hat{\theta}_n(X)-\theta)^2. \quad (1.10)$$

由风险定义,若 $\lim_{n\to+\infty}R_n=R_G$,称 $\hat{\theta}_n$ 为渐近最优(a. o.) 的 EB 估计;若 $R_n-R_G=O(n^{-q})$, $q>0$,则称 $\hat{\theta}_n$ 的 EB 估计的收敛速度为 q.

1.2 几个引理

引理 1.1[7] 令 X 和 Y 是 NA 变量,皆有有限方差,则对任何两个可微函数 g_1 和 g_2,有

$$|\mathrm{Cov}(g_1(X),g_2(Y))|\leqslant\sup_x|g'_1(x)|\cdot\sup_y|g'_2(y)|[-\mathrm{Cov}(X,Y)].$$

引理 1.2[8] 设 $f_n^{(i)}(x)=\frac{1}{nh_n^{1+i}}\cdot\sum_{j=1}^{n}K_i(\frac{X_j-x}{h_n})$, $i=0,1,\cdots,s-1$, $s>1$ 为正整数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为同分布弱平稳 NA 样本序列,假定条件(A),(B),(i),(ii) 成立,则当 $0<\lambda\leqslant 1$, $h_n=n^{-\frac{1}{s+2i}}$ 时,$E_n|f_n^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)|^{2\lambda}\leqslant cn^{-\frac{\lambda(s-i)}{s+2}}$.

引理 1.3[2] 若 $R_G < \infty$,则对任何 EB 估计 $\hat{\theta}_n$ 的风险 R_n 有 $R_n - R_G = E_*(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_B(X))^2$.

引理 1.4[3] 设 Y, Y' 为 r.v.,y, y' 为实数,$L > 0$,对 $0 < r < 2$ 有

$$E|[\frac{Y'}{Y} - \frac{y'}{y}]_L|^r \leqslant 2|y|^{-r}\{E|Y' - y'|^r + (|\frac{y'}{y}| + L)^r E|Y - y|^r\}.$$

引理 1.5[8] 设 $p_G(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别由(1.4)式和(1.8)式给出,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为同分布弱平稳 NA 样本序列,则当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时,有

$$E_*|p_n(x) - p_G(x)|^{2\lambda} \leqslant n^{-\lambda}.$$

2 主要结果

命题 2.1 如果对 $t \geqslant 1$,$E|\theta|^t < \infty$,则

(1) 对于由(1.6)式定义的 $\hat{\theta}_B(x)$ 有 $E_*|\hat{\theta}_B(X)|^t < \infty$.

(2) 对于由(1.6)式给出的 $\varphi_B(X)$,若 $E_*|X|^t < \infty$,则 $E_*|\varphi_B(X)|^t < \infty$.

证明 由 Jensen 不等式知,对下凸函数 $f(x)$,有 $f(EX) \leqslant E[f(X)]$,因此,

$$E_*|\hat{\theta}_B(X)|^t = \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\theta}_B(x)|^t f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}|E_{(\theta|x)}(\theta)|^t f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(E_{(\theta|x)}|\theta|^t)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\theta|^t f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|\theta|^t\mathrm{d}G(\theta) = E|\theta|^t < \infty.$$

由(1.6)式知 $\varphi_B(x) = \hat{\theta}_B(x) + \mu x$,而 $\mu > 0$ 为已知常数,再利用 C_r 不等式

$$E_*|\varphi_B(X)|^t \leqslant 2^{t-1}(E_*|\hat{\theta}_B(X)|^t + E_*|\mu X|^t) = 2^{t-1}(E_*|\hat{\theta}_B(X)|^t + \mu^t E_*|X|^t) < \infty.$$

因此,命题得证.

定理 2.1 设 R_G, R_n 分别由(1.7)式和(1.10)式给出,$\hat{\theta}_n$ 由(1.9)式给出,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为同分布弱平稳NA样本序列,$s > 1$ 为任意确定的自然数,$\frac{1}{s} < r < 1$,若条件(A),(B),(i),(ii)成立,且

(1) $\int_0^{+\infty}|\theta|^{2rs}\mathrm{d}G(\theta) < \infty, E_*|X|^{2rs} < \infty$,

(2) $E_*(f(X))^{-r} < \infty$,

则当 $h_n = n^{-\frac{1}{2s+4}}$ 时,有 $R_n - R_G = O(n^{-\frac{(rs-1)(s-1)}{2s(s+2)}})$.

证明 由命题 2.1 知,$R_G = E_{(x,\theta)}(\hat{\theta}_B - \theta)^2 \leqslant 2(E_*(\hat{\theta}_B^2) + E_*(\theta^2)) < \infty$,故引理 1.3 的条件成立,又由(1.6)式和(1.9)式有

$$R_n - R_G = E_*|\hat{\theta}_n(X) - \hat{\theta}_B(X)|^2 = E_*|\hat{\varphi}_n(X) - \varphi_B(X)|^2. \tag{2.1}$$

令 $A_n = \{x \in R^1 : |\varphi_B(x) < \frac{1}{2}n^v|\}$,$B_n = R^1 - A_n$.

当 $x \in A_n$ 时,$|\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x)|^2 \leqslant \frac{3}{2}n^v$,此时由引理 1.2,引理 1.4 和引理 1.5 可以知道

$$E_n|\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x)|^2 = E_n[|\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x)|^{2-r}|\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x)|^r] \leqslant (\frac{3}{2}n^v)^{2-r} \cdot E_n|[\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x)]_{\frac{3}{2}n^v}|^r = (\frac{3}{2}n^v)^{2-r} \cdot E_n|[\frac{\mu p_n(x) - f_n^{(1)}(x)}{f_n(x)} - \frac{\mu p_G(x) - f^{(1)}(x)}{f(x)}]_{\frac{3}{2}n^v}|^r \leqslant (\frac{3}{2}n^v)^{2-r}2(f(x))^{-r}\{E_n|\mu(p_n(x) - p_G(x) + (f^{(1)}(x) - f_n^{(1)}(x))|^r + (|\varphi_B(x)| + \frac{3}{2}n^v)^r \cdot E_n|f_n(x) - f(x)|^r\} \leqslant c_1 n^{v(2-e)}(f(x))^{-r} \cdot \{c_2 n^{\frac{r}{2}} + c_3 n^{-\frac{r(s-1)}{2(s+2)}} + c_4^{nv - \frac{rs}{2(s+2)}}\} \leqslant c_5(f(x))^{-r} \cdot n^{-(\frac{r(s-1)}{2(s+2)} - 2v)}.$$

由条件(2)有

$$\int_{A_n} E_n(\hat{\varphi}_n(x) + \varphi_B(x))^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant c_5 n^{-(\frac{r(s-1)}{2(s+2)} - 2v)}E_*(f(X))^{-r} \leqslant cn^{-(\frac{r(s-1)}{2(s+2)} - 2v)}. \tag{2.2}$$

当 $x \in B_n$ 时,

$$(\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x))^2 \leqslant 2\hat{\varphi}_n^2(x) + 2\varphi_B^2(x) \leqslant 2n^{2v} + 2\varphi_B^2(x) \leqslant 10\varphi_B^2(x),$$

故由 Holder 不等式,Markov 不等式及命题 2.1 有

$$\int_{B_n} E_n(\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x))^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 10\int_{B_n}\varphi_B^2(x)f(x)\mathrm{d}x = 10[E_*(\varphi_B^2(X)I_{[|\varphi_B(X)| \geqslant \frac{1}{2}n^v]}] \leqslant 10[E_*(\varphi_B(X)^{2rs}]^{\frac{1}{rs}}[E_*I_{[|\varphi_B(X)| \geqslant \frac{1}{2}n^v]}]^{\frac{rs-1}{rs}} \leqslant 10[E_*(\varphi_B(X))^{2rs}]^{\frac{1}{rs}}[2^{2rs}n^{-2rsv}E_*(\varphi_B(X))^{2rs}]^{\frac{rs-1}{rs}} \leqslant c_6 n^{-2v(rs-1)}. \tag{2.3}$$

令 $\frac{r(s-1)}{2(s+2)} - 2v = 2v(rs-1)$,即 $v = \frac{s-1}{4s(s+2)}$,则综合(2.1)~(2.3)式有

$$R_n - R_G = \int_{A_n} E_n(\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x))^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_{B_n} E_n(\hat{\varphi}_n(x) - \varphi_B(x))^2 f(x)\mathrm{d}x = O(n^{-\frac{(rs-1)(s-1)}{2s(s+2)}}).$$

参考文献:

[1] Robbins H. An empirical Bayes approach to statistics [J]. Math Statist Prob, 1955, 1: 157-164.

[2] Singh R S. Empirical Bayes estimation in Lebesgue-exponential family with rates near best possible rate[J]. Ann Statist, 1979, 7: 890-902.

(下转第 176 页)

得$\|A^{\mathrm{T}}XA-B\|=\min$.

引理2 设$B_{22}\in R^{s\times s}$, $S_1=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)>0$, $S_2=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)>0$，则$\|S_1G_{22}S_2-B_{22}\|=\min$在$SR^{s\times s}$中存在唯一解

$$\hat{G}_{22}=S_1^{-1}[\Phi*(B_{22}S_1^{-1}S_2+S_1^{-1}S_2B_{22}^{\mathrm{T}})]S_1^{-1},\quad(14)$$

其中$\Phi=(\varphi_{ij})\in R^{s\times s}$, $\varphi_{ij}=\dfrac{(\alpha_i\alpha_j)^2}{(\alpha_i\beta_j)^2+(\alpha_j\beta_i)^2}$, $1\leqslant i,j\leqslant s$.

证明 对于$G_{22}=(g_{ij})\in SR^{s\times s}$和$B_{22}=(b_{ij})\in R^{s\times s}$，展开

$$\|S_1G_{22}S_2-B_{22}\|^2=\sum_{i=1}^{s}(\alpha_ig_{ii}\beta_i-b_{ii})^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}g_{ij}^2[(\alpha_i\beta_j-b_{ij})^2+(\alpha_j\beta_i-b_{ji})^2].\quad(15)$$

在(15)式中用微分法求驻点得到

$$g_{ij}=\frac{b_{ij}\alpha_i\beta_j+b_{ji}\alpha_j\beta_i}{\alpha_i^2\beta_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2},\ 1\leqslant i,j\leqslant s.$$

因此(14)式成立.

定理2 符号与定理1相同. 问题Ⅰ的解为

$$X=UY_0U^{\mathrm{T}}D^2+U\begin{pmatrix}O&O\\O&\hat{G}\end{pmatrix}U^{\mathrm{T}}D^2,\quad(16)$$

其中$\hat{G}=$

$$M^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix}G_{11}&B_{12}S_1^{-1}&B_{13}&G_{14}\\S_1^{-1}B_{12}^{\mathrm{T}}&\hat{G}_{22}&S_1^{-1}B_{23}&G_{24}\\B_{13}^{\mathrm{T}}&B_{23}^{\mathrm{T}}S_1^{-1}&G_{33}&G_{34}\\G_{14}^{\mathrm{T}}&G_{24}^{\mathrm{T}}&G_{34}^{\mathrm{T}}&G_{44}\end{pmatrix}M^{-1},\ \hat{G}_{22}=$$

$S_1^{-1}[\Phi*(B_{22}S_1^{-1}S_2+S_1^{-1}S_2B_{22}^{\mathrm{T}})]S_1^{-1}$, $\Phi=(\varphi_{ij})\in R^{s\times s}$, $\varphi_{ij}=\dfrac{(\alpha_i\beta_j)^2}{(\alpha_i\beta_j)^2+(\alpha_j\beta_i)^2}$, $1\leqslant i,j\leqslant s$. $G_{14},G_{24},G_{33},G_{34},G_{44}$为任意矩阵.

证明 设$X\in S$，则由引理1知

$$X=UY_0U^{\mathrm{T}}D^2+U\begin{pmatrix}O&O\\O&G\end{pmatrix}U^{\mathrm{T}}D^2,$$

而且

$$\|A^{\mathrm{T}}XA-B\|^2=\|A^{\mathrm{T}}UY_0U^{\mathrm{T}}D^2A+A^{\mathrm{T}}U\begin{pmatrix}O&O\\O&G\end{pmatrix}U^{\mathrm{T}}D^2A-B\|^2=\|A_2G\overline{A_2}-\overline{B}\|^2=$$

$$\|P{\textstyle\sum_1^{\mathrm{T}}}M^{\mathrm{T}}GM{\textstyle\sum_2}Q^{\mathrm{T}}-\overline{B}\|^2=$$

$$\|{\textstyle\sum_1^{\mathrm{T}}}M^{\mathrm{T}}GM{\textstyle\sum_2}-P^{\mathrm{T}}\overline{B}Q\|^2=$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-B_{11}&G_{12}S_2-B_{12}&G_{13}-B_{13}\\-B_{21}&S_1G_{22}S_2-B_{22}&S_1G_{23}-B_{23}\\-B_{31}&-B_{32}&-B_{33}\end{pmatrix}\right\|^2=$$

$$\|G_{12}S_2-B_{12}\|^2+\|G_{13}-B_{13}\|^2+\|S_1G_{22}S_2-B_{22}\|^2+\|S_1G_{23}-B_{23}\|^2+\|B_{11}\|^2+\|B_{21}\|^2+\|B_{31}\|^2+\|B_{32}\|^2+\|B_{33}\|^2.$$

因此$\|A^{\mathrm{T}}XA-B\|=\min$当且仅当$\|G_{12}S_2-B_{12}\|=\min$, $\|G_{13}-B_{13}\|=\min$, $\|S_1G_{23}-B_{23}\|=\min$, $\|S_1G_{22}S_2-B_{22}\|=\min$.

显然$G_{12}=B_{12}S_2^{-1}$, $G_{13}=B_{13}$, $G_{23}=S_1^{-1}B_{23}$. 由引理2知$\hat{G}_{22}$为(14)式.

因此问题Ⅰ的一般解为(16)式.

参考文献：

[1] 张忠志，周富照，胡锡炎. D对称矩阵反问题的最小二乘解[J]. 湖南大学学报，2001，28(5)：6-10.

[2] 易学军，张忠志，周富照. 线性流形上D对称矩阵反问题的最小二乘解[J]. 数学理论与应用，2002，22(1)：93-97.

（责任编辑：韦廷宗）

（上接第173页）

[3] 赵林城. 一类离散分布参数的经验Bayes估计的收敛速度[J]. 数学研究与评论. 1981，1：59-69.

[4] 陈家清，刘次华. 线性指数分布参数的经验贝叶斯估计[J]. 华中科技大学学报，2006，10：122-124.

[5] Joag-Dev K，Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann Statist，1983，11：286-295.

[6] 魏立力，张文修. 线性指数危险率模型的贝叶斯判别分析[J]. 数学物理学报，2003，23A(4)：436-443.

[7] Pan J M. On the convergence rates in the central limit theorem for negatively associated sequences[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics，1997，13(2)：183-192.

[8] 陈家清，刘次华. 负相伴样本线性指数分布参数的经验Bayes双侧检验问题[J]. 数学理论与应用，2006(3)：42-47.

（责任编辑：尹 闯）