一类比率依赖捕食与被捕食系统的定性分析

Qualitative Analysis of a Ratio-Dependent Predator-Prey System

梁志清
LIANG Zhi-qing

(玉林师范学院数学与计算机科学系,广西玉林 537000)
(Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要:研究一类比率依赖的捕食与被捕食系统.首先给出系统的有界性及持久性;其次给出边界平衡点及正平衡点的全局渐近稳定性;最后证明当正平衡点为不稳定的焦(结)点时,系统存在唯一极限环.

关键词:比率依赖 全局渐近稳定 极限环

中图法分类号:O175.12 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)03-0177-04

Abstract: In this paper, a ratio-dependent predator-prey systems was studied. First, results on the boundedness of solutions, the permanence of the system, are presented. Second, the sufficient conditions for both global stabilities of positive equilibrium and boundary equilibrium are established. Finally, it is proved that when the positive equilibrium becomes unstable, system has a unique limit cycle.

Key words: ratio-dependent, global asymptotic stability, limit cycles

近年来,在涉及捕食者搜寻食物的场合,许多生态学者采用具有功能反应比率依赖的捕食与被捕食系统描述捕食与被捕食的相互作用[1~6].文献[3～5]研究比率依赖具有 Holling II 类功能反应的捕食与被捕食系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}= rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{mx}{Ay+x}y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cy\dfrac{fx}{Ay+x}-dy,\\ x(0)>0,y(0)>0,\end{cases}\tag{0.1}$$

其中 r,k,a,m,c,f,d 是正常数.系统(0.1)研究的是基于种群相对增长率为线性函数的情况. Glipin 与 Anala[7]在1973年指出 Lotka-Volterra 系统是相对增长率$\dfrac{x'}{x}$ 的线性化,Anala 等[7,8]介绍了一种食饵的相对增长率 $g(x)=r\left(1-\left(\dfrac{x}{k}\right)^{\theta}\right)$,其中 θ 是相互作用的非线性度量.基于理论及实际上的意义,从此出现了许多与非线性度量相关的研究[7~10].

本文考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}= rx\left(1-\left(\dfrac{x}{k}\right)^{\theta}\right)-\dfrac{mx}{Ay+x}y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cy\dfrac{fx}{Ay+x}-dy,\\ x(0)>0,y(0)>0,\end{cases}\tag{0.2}$$

其中 r, k, a, m,θ,c,f,d 是正常数.作为一个数学模型,系统(0.2)更为一般化,如 $\theta=1$, 则(0.2)变为基于比率依赖具有 II 类功能反应的捕食与被捕食系统(0.1).

令

$$F(x,y)= xr\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^{\theta}\right)-\frac{mx}{Ay+x}y,$$

$$G(x,y)=cy\frac{fx}{Ay+x}-dy.$$

假设 $F(0,0)=G(0,0)=0$,系统有初始条件 $x(0)>0$, $y(0)>0$.在这假设下,$F(x,y)$和 $G(x,y)$在 $R_+^2=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$是连续的.

为了简化,对系统(0.2)无量纲化 $rt\to t,\dfrac{x}{k}\to x,$

收稿日期:2007-10-29
修回日期:2008-05-04
作者简介:梁志清(1965-),女,教授,主要从事生物数学研究。

$\frac{Ay}{k}\to y$,得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-x^{\theta})-\frac{axy}{x+y},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\delta y(-\beta+\frac{x}{x+y}),\\ x(0)>0,y(0)>0,\end{cases} \quad (0.3)$$

其中 $a=\frac{mk}{rA},\delta=\frac{cf}{r},\beta=\frac{d}{f}$.

1 系统的有界性和持久性

由系统(0.3)的第一个方程,得 $x'(t)\leqslant x(1-x^{\theta})$.由比较原理[11]得 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup x(t)\leqslant 1$.于是,对正数 $M>1$,存在 $T>0$,当 $t>T$ 时,有 $x(t)<M$.

由系统(0.3)的第二个方程可知,当 $t>T$ 时,有 $y'(t)\leqslant\delta y(-\beta+\frac{M}{M+y})\leqslant\delta y(-\beta+\frac{M}{y})$.由比较原理得 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup y(t)\leqslant\frac{M}{\beta}$.

引理1.1 系统(0.3)的解是有界的,并且对大于1的正数 M,存在一个 $T\geqslant 0$,使得当 $t\geqslant T$ 时,有 $0<x(t)<M,0<y(t)<\frac{M}{\beta}$.

这同时表明系统(0.3)是扩散的.

对系统(0.3),如果 $a<1$ 成立,则 $x'(t)>x(1-x^{\theta}-a)$.这说明 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)\geqslant 1-a$,记 $x_0=1-a$.对充分大的 t,$x(t)>\frac{x_0}{2}$,$y'(t)>\delta y(-\beta+\frac{x_0/2}{x_0/2+y})$,即 $y'(t)>\delta y\frac{\frac{x_0}{2}(1-\beta)-\beta y}{y+\frac{x_0}{2}}$.如果 $\beta<1$ 成立,则 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)\geqslant\frac{x_0}{2}\frac{1-\beta}{\beta}$.

定理1.1 如果条件 $a<1$ 及 $\beta<1$ 成立,则系统(0.3)是持久的.

2 系统边界平衡点及正平衡点的稳定性

显然,系统(0.3)总有边界平衡点 $E_0(1,0)$,且有正平衡点的 $E_*(x_*,y_*)$ 的条件为:$1-\frac{1}{a}<\beta<1$,其中 $x_*=(1-a(1-\beta))^{\frac{1}{\theta}}$,$y_*=\frac{1-\beta}{\beta}x_*$.

系统(0.3)的变分矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $J_{11}=1-(1+\theta)x^{\theta}-\frac{ay^2}{(x+y)^2}$,$J_{12}=-\frac{ax^2}{(x+y)^2}$,$J_{21}=\delta\frac{y^2}{(x+y)^2}$,$J_{22}=-\delta\beta+\frac{\delta x^2}{(x+y)^2}$.

定理2.1 如果条件 $\beta<1$ 成立,则系统(0.3)的边界平衡点 $E_0(1,0)$ 是不稳定的;如果条件 $\beta>1$ 及 $a<1$ 成立,则系统(0.3)的边界平衡点 $E_0(1,0)$ 是全局渐近稳定的.

证明 系统(0.3)在 $E_0(1,0)$ 的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_0\})=\begin{pmatrix}-\theta & -a\\ 0 & \delta(1-\beta)\end{pmatrix}.$$

显然,当 $\beta<1$,系统(0.3)的边界平衡点 $E_0(1,0)$ 是不稳定的;当 $\beta>1$ 时,$E_0(1,0)$ 是局部稳定的.

另一方面,从系统(0.3)的第二个方程,有 $y'(t)<\delta y(-\beta+1)$.如果 $\beta>1$ 成立,则 $y'(t)<0$.由比较原理得 $y(t)\leqslant ce^{-\delta(\beta-1)t}$.因此,$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$.

对于系统(0.3),有 $x'(t)\leqslant x(1-x^{\theta})$.由比较原理得 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup x(t)\leqslant 1$.若 $a<1$,则 $x'(t)>x(1-x^{\theta}-a)$.进一步有 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)\geqslant 1-a$.记 $x_0=1-a$.对 $\forall\ 0<\varepsilon<1$ 及充分大的 t,有 $x'(t)>x(1-x^{\theta}-\varepsilon)$.由此有 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)>1-\varepsilon$.由 ε 的任意性知,$\lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)\geqslant 1$.

综上所述,$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=1$.定理2.1证明完毕.

系统(0.3)在 E_* 的变分矩阵为

$$J(E_*)=\begin{bmatrix}\theta x_*^{\theta}+a\beta(1-\beta) & -ax_*\beta^2\\ \delta(1-\beta)^2 & -\delta\beta(1-\beta)\end{bmatrix}.$$

$J(E_*)$ 的行列式为 $\det(J(E_*))=\theta\delta\beta(1-\beta)x_*^{\theta}$,$J(E_*)$ 的迹为 $\operatorname{tr}(J(E_*))=-\theta+(1-\beta)[a\theta+(a-\delta)\beta]$.

显然,当 $\operatorname{tr}(J(E_*))<0$ 时,系统的正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$ 是局部渐近稳定的焦(结)点;当 $\operatorname{tr}(J(E_*))>0$ 时,系统的正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$ 是不稳定的焦(结)点.

引理2.1 假设条件

H1:$1-\frac{1}{a}<\beta<1$,

H2:$\theta>(1-\beta)[a\theta+(a-\delta)\beta]$

成立,则系统(0.3)的正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$ 是局部渐近稳定的.

引理2.2 假设条件

H1:$1-\frac{1}{a}<\beta<1$,

H3:$\theta<(1-\beta)[a\theta+(a-\delta)\beta]$

成立,则系统(0.3)的正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$ 是不稳定的焦(结)点.

定理2.2 假设条件

H1:$1-\frac{1}{a}<\beta<1$,

H2: $\theta>(1-\beta)[a\theta+(a-\delta)\beta]$,

H4: $\delta>a$

成立,则系统(0.3)的正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$ 在第一象限内全局渐近稳定.

证明 令 $B(x,y)=(xy)^{-1}$, 则

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}=-\theta x^{\theta-1}\frac{1}{y}-\frac{\delta-a}{(x+y)^2}<0,$$

根据 Bendixson-Dulac 定理[11],上式在 R_+^2 内没有闭轨. 由引理1.1及引理2.1可知,正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$是全局渐近稳定的.

3 极限环存在的唯一性

引理3.1[12] 设 $f(x),g(x)$ 在开区间(r_1,r_2)内连续可导,$\varphi(y)$是在 R 上连续可导的函数,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi(y)-\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(u)\mathrm{d}u,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x),\end{cases}\tag{3.1}$$

若(i)$\dfrac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}>0$;(ii)存在唯一 $x_0\in(r_1,r_2)$使 $g(x_0)=0$,且当 $x\neq x_0$时,$(x-x_0)g(x-x_0)>0$;(iii)当 $x\neq x_0$时, $f(x_0)\dfrac{d}{dx}(\dfrac{f(x)}{g(x)})<0$;则系统(3.1)至多有一个极限环.

定理3.1 假设条件

H1: $1-\dfrac{1}{a}<\beta<1$,

H3: $\theta<(1-\beta)[a\theta+(a-\delta)\beta]$,

H4: $a>\delta$

成立,则系统(0.3)有唯一的极限环.

证明 从局部稳定性的分析知,若条件 H1及H3成立,则唯一的正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$是不稳定的焦(结)点,由引理1.1及 Poincaré-Bendixson 原理[11]得极限环的存在性.

作变换 $\eta=\ln\dfrac{y}{y_*},\xi=\eta-\ln\dfrac{x}{x_*},e^{-\theta\xi}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\gamma$. 则系统(0.3)变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\gamma}=x_*^{\theta}e^{\theta\eta}-e^{\theta\xi}[(1+\delta\beta)-\dfrac{\delta}{v_*e^{\xi}+1}-\\ \qquad\dfrac{av_*e^{\xi}}{v_*e^{\xi}+1}]\equiv\varphi(\eta)-F(\xi),\\ \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\gamma}=-\dfrac{\delta v_*e^{\theta\xi}}{(v_*+1)(v_*e^{\xi}+1)}(e^{\xi}-1)\equiv-g(\xi),\end{cases}\tag{3.2}$$

其中 $x_*=(1-a(1-\beta))^{\frac{1}{\theta}},v_*=\dfrac{y_*}{x_*}=\dfrac{1-\beta}{\beta},\varphi(\eta)=x_*^{\theta}e^{\theta\eta},F(\xi)=e^{\theta\xi}[(1+\delta\beta)-\dfrac{\delta}{v_*e^{\xi}+1}-\dfrac{av_*e^{\xi}}{v_*e^{\xi}+1}]$,

$$g(\xi)=\frac{\delta v_*e^{\theta\xi}}{(v_*+1)(v_*e^{\xi}+1)}(e^{\xi}-1).$$

验证系统(3.2)满足引理3.1的3个条件.

(1)对所有的 $\eta,\varphi(\eta)=\theta x_*e^{\theta\eta}>0$.

(2)$g(\xi)=0\Leftrightarrow\xi=0$ 且当 $\xi\neq0$时,$\xi g(\xi)=\dfrac{\delta v_*e^{\theta\xi}}{(v_*+1)(v_*e^{\xi}+1)}\xi(e^{\xi}-1)>0$.

(3)
$$f(\xi)=F'(\xi)=\theta e^{\theta\xi}[(1+\delta\beta)-\frac{\delta}{v_*e^{\xi}+1}-\frac{av_*e^{\xi}}{v_*e^{\xi}+1}]+e^{\theta\xi}[\frac{\delta v_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}-\frac{av_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}]=$$
$$e^{\theta\xi}[\theta(1+\delta\beta)-\frac{\theta\delta}{v_*e^{\xi}+1}-\frac{a\theta v_*e^{\xi}}{v_*e^{\xi}+1}+\frac{\delta v_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}-\frac{av_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}].$$

$$f(0)=\theta(1+\delta\beta)-\frac{\theta\delta}{v_*+1}-\frac{a\theta v_*}{v_*+1}+\frac{\delta v_*}{(v_*+1)^2}-\frac{av_*}{(v_*+1)^2}]=\theta-(1-\beta)[a\theta+(a-\delta)\beta]<0.$$

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{(v_*+1)(v_*e^{\xi}+1)}{\delta v_*e^{\theta\xi}(e^{\xi}-1)}e^{\theta\xi}[\theta(1+\delta\beta)-\frac{\theta\delta}{v_*e^{\xi}+1}-\frac{a\theta v_*e^{\xi}}{v_*e^{\xi}+1}+\frac{\delta v_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}-\frac{av_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}]=$$
$$\frac{(v_*+1)(v_*e^{\xi}+1)}{\delta v_*(e^{\xi}-1)}[\theta(1+\delta\beta)-\frac{\theta\delta}{v_*e^{\xi}+1}-\frac{a\theta v_*e^{\xi}}{v_*e^{\xi}+1}+\frac{\delta v_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}-\frac{av_*e^{\xi}}{(v_*e^{\xi}+1)^2}].$$

定义 $z=e^{\xi}$,则

$$G(z)=\frac{(v_*z+1)}{z-1}[\theta(1+\delta\beta)-\frac{\theta\delta}{v_*z+1}-\frac{a\theta v_*z}{v_*z+1}+\frac{\delta v_*z}{(v_*z+1)^2}-\frac{av_*z}{(v_*z+1)^2}].$$

计算$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$的一阶导数得

$$(\frac{f(\xi)}{g(\xi)})'=\frac{v_*+1}{\delta v_*}G'(z)e^{\xi}.$$

下面证明当 $z\geqslant0$且 $z\neq1$时, $G'(z)>0$.

直接计算得

$$G(z)=\theta(1+\delta\beta)\frac{(v_*z+1)}{z-1}-\frac{\theta\delta}{z-1}+(\delta-a)\frac{v_*}{v_*+1}\frac{1}{z-1}-\frac{a\theta v_*z}{z-1}+(\delta-a)\frac{v_*}{v_*+1}\frac{1}{v_*z+1}.$$

$$G'(z)=-\theta(1+\delta\beta)\frac{(v_*+1)}{(z-1)^2}+\frac{\theta\delta}{(z-1)^2}-(\delta-a)\frac{v_*}{v_*+1}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{a\theta v_*}{(z-1)^2}-(\delta-a)\frac{v_*}{v_*+1}\frac{v_*}{(v_*z+1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}[-\theta(1+\delta\beta)(v_*+1)+\theta\delta-(\delta-a)\frac{v_*}{v_*+1}+a\theta v_*]-(\delta-$$

$a)\frac{v_*^2}{v_*+1}\frac{1}{(v_*z+1)^2}]$.

令 $A=-\theta(1+\delta\beta)(v_*+1)+\theta\delta-(\delta-a)\cdot\frac{v_*}{v_*+1}+a\theta v_*$，$B=-(\delta-a)\frac{v_*^2}{v_*+1}$. 得

$$A=-\theta(1+\delta\beta)(v_*+1)+\theta\delta-(\delta-a)\cdot\frac{v_*}{v_*+1}+a\theta v_*=\frac{1}{\beta}\{-\theta+(1-\beta)[a\theta+(a-\delta)\beta]\}>0.$$

因此，若 $a>\delta$，则当 $z\geqslant 0$ 且 $z\neq 1$ 时，$G'(z)>0$. 由此得当 $\xi\neq 0$时，$(\frac{f(\xi)}{g(\xi)})'>0$. 进一步，当 $\xi\neq 0$ 时 $f(0)\frac{d}{d\xi}(\frac{f(\xi)}{g(\xi)})<0$.

由此可知系统(3.2)满足引理3.1的3个条件. 因此，系统(0.3)有唯一的极限环.

4 结束语

本文研究一类比率依赖的捕食与被捕食系统，得到系统有唯一的正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$，且正平衡点在一定条件下全局渐近稳定. 这说明在一定条件下，随着时间的增长，捕食者与食饵最终能达到平衡状态. 另一方面，当正平衡点变得不稳定时，围绕正平衡点 $E_*(x_*,y_*)$ 的极限环出现，且在一定条件下极限环是唯一的，从生态的角度，说明捕食者与食饵振荡共存.

参考文献：

[1] Xu R, Chen L S. Persistence and stability for a two species ratio-dependent predator-prey system with time delay in a two-patch environment [J]. Computers Math Appl, 2000, 40: 577-588.

[2] Tang S y, Chen L S. Global qualitative Analysis for a ratio-dependent predator-prey model with delay[J]. J Math Anal Appl, 2002, 266: 401-419.

[3] Hsu S B, Hwang T W, Kuang Y. Global analysis of the Michaelis-Menten type ratio-dependence predator-prey system[J]. J Math Biol, 2001, 42: 489-506.

[4] Beretta E, Kuang Y. Global analysis in some delayed ratio-dependent predator-prey systems[J]. Nonl Anal TMA, 1998, 32: 381-408.

[5] Kuang Y, Beretta E. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Biol, 1998, 36: 389-406.

[6] Jot C, Arino O, Arduti E. About deterministic extinction in ratio-dependent predator-prey models[J]. Bull Math Biol, 1999, 61: 19-32.

[7] Glipin M E, Anala F J. Global models pg growth and competition [J]. Proc Mat Acad Sci Usa, 1973, 70: 3590-3593.

[8] Anala F J, Glipin M E, Eherenfelg J G. Competition between species : theoretical models and experimental test[J]. Theo Popul Biol, 1973, 4: 331-356.

[9] Goh B S, Agnew T T. Stability in gilpin and ayala's model of competition[J]. J Math Biot, 1977, 4: 275-279.

[10] Liao X X, Li J. Stability in gilpin-ayala cometition models with diffusion[J]. Nonl Anal TMA, 1997, 28: 1751-1758.

[11] 马知恩，周义仓. 常数分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2003：11-203.

[12] Coppel W A. A new class of quadratic system[J]. J Diff Equa, 1991, 92: 360-372.

(责任编辑：韦廷宗)

日本利用化合物制成原子级纳米电线

日本名古屋大学研究人员成功开发出一种原子级别的纳米电线，这种电线由化合物制成，直径只有毛发的万分之一左右。

研究人员将完全去除了不纯物质的直径约2 nm 的碳纳米管与一种叫氯化铒的化合物一起放入真空的耐热容器，并在700℃的高温条件下连续加热7d。7d 后，纳米管中的氯化铒完全融化，并形成一根由氯原子与铒原子构成的直径约为 1.8nm 的纳米电线。以往人们制造纳米电线时，使用的方法是用超细的探针将原子逐个地排列起来，比较繁锁。如果使用化合物制成纳米电线，制造过程将大大简化。此外，如果改变纳米电线中化合物的成分，还可以制造出能够改变导电性和磁铁磁性强弱的电线。

目前半导体的配线主要使用铜线，如果换用这种纳米电线可以大幅度减少配线的体积，因此这种纳米电线有可能被使用作为高速低电的下一代半导体的配线。此外，这种纳米电线的研制在人们研究纳米级别的物质性质等基础研究方面也将发挥积极的推动作用。

(据科学网)