广西科学院学报 2008,24(3):184～185
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 24,No. 3 August 2008

一种新的求等幂和的数值计算方法

A New Numerical Method to Evaluate the Sum of Equal Powers

冯积社
FENG Ji-she

(陇东学院数学系,甘肃庆阳 745000)
(Department of Mathematic,Longdong University,Qingyang,Gansu,745000,China)

摘要:借助牛顿公式和韦达定理,采用迭代的方法求解类似于自然数等幂和的问题.这种新方法的时间复杂度远远低于传统的一般方法,并且解决了任意实数的等幂和问题.

关键词:等幂和 韦达定理 牛顿公式 Maple

中图法分类号:O156 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2008)03-0184-02

Abstract: With the help of Newton formula and Vieta theorem, iterative method was used to solve problems of power sum. The time complexity of proposed algorithm is $O(k^2)$, which is lower than normal method. Meanwhile, the proposed algorithm can also solve real power sum problem.

Key words: powers sum, Vieta theorem, Newton formula, Maple

文献[1～9]从无穷级数的角度借助数学软件Mathematica或Matlab,对自然数等幂和公式进行研究,取得了很好的成果.但是对于类似于自然数等幂和的问题,如隔若干个数后的自然数等幂和问题,或者更一般的一系列实数的等幂和,就不能使用这些方法来进行求解.本文从另一个角度来对这一问题进行研究,不直接借助于数学软件Mathematica来实现计算,而是借助于牛顿公式和韦达定理,采用递推公式,用有限项求解的方法来实现类似于自然数等幂和这一类问题,最后以例题的形式用数学软件Maple来具体实现.

1 相关定理

定理[10](Newton 公式) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 次多项式 $f(x)$ 的根,如果

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma, \quad (1)$$

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,(k=0,1,2,\cdots). \quad (2)$$

则

i) 当$0\leqslant k\leqslant n$时,有

$$s_k=\sigma_1s_{k-1}-\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^k\sigma_{k-1}s_1+(-1)^{k+1}k\sigma_k; \quad (3)$$

ii) 当 $k>n$ 时,有

$$s_k=\sigma_1s_{k-1}-\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{n+1}\sigma_ns_{k-n}. \quad (4)$$

2 类似于自然数等幂和的数值计算方法

只要令 $x_1=1,x_2=2,\cdots,x_n=n$,则可以直接应用(1)～(4)式求得任意次 k 的自然数等幂和公式.

求(1)式中的系数,采用递推公式逐步进行.

$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)=(x^2-x-2x+2)(x-3)\cdots(x-n)=(x^2-3x+2)(x-3)\cdots(x-n)=(x^3-3x^2+2x-3x^2+9x-6)(x-4)\cdots(x-n)=(x^3-6x^2+11x-6)(x-4)\cdots(x-n)=(x^4-6x^3+11x^2-6x-4x^3+24x^2-44x+24)(x-5)\cdots(x-n)=(x^4-10x^3+35x^2-50x+24)(x-5)\cdots(x-n)=\cdots=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$.

每次进行一个多项式与一次多项式$(x-i)$的乘法运算,这样本质上只是常数 i 与多项式的系数做乘法(首项为1,还可减少一次),最后将错后一位的两个式子对应的系数相加,便完成了一次循环.总共进行$1+2+3+(n-1)=n(n-1)/2$次的乘法.

当$0\leqslant k\leqslant n$时,通过(3)式来求相应的自然数的 k 次幂和的过程是一个递推的过程.

$s_0=n$,

收稿日期:2008-01-07
修回日期:2008-03-26
作者简介:冯积社(1965-),男,副教授,主要从事数值分析研究。

$s_1=\sigma_1$，

$s_2=\sigma_1 s_1-2\sigma_2$，

$s_3=\sigma_1 s_2-2\sigma_2 s_1+3\sigma_2$，

$s_4=\sigma_1 s_3-2\sigma_2 s_2+3\sigma_3 s_1-4\sigma_4$，

$s_5=\sigma_1 s_4-2\sigma_2 s_3+3\sigma_3 s_2-4\sigma_4 s_1+5\sigma_5$，

…

$s_k=\sigma_1 s_{k-1}-2\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^k\sigma_{k-1}s_1+(-1)^{k+1}k\sigma_k$.

这样，求 $s_k(0\leqslant k\leqslant n)$ 需要 $1+2+3+\cdots+k=k(1+k)/2$ 次的乘法.

当 $k>n$ 时，通过(4)式，相应的计算公式变为

$s_{n+1}=\sigma_1 s_n-\sigma_2 s_{n-1}+\sigma_3 s_{n-2}+\cdots+(-1)^{n+1}\sigma_n s_1$，

$s_{n+2}=\sigma_1 s_{n+1}-\sigma_2 s_n+\sigma_3 s_{n-1}+\cdots+(-1)^{n+1}\sigma_n s_2$，

$s_{n+3}=\sigma_1 s_{n+2}-\sigma_2 s_{n+1}+\sigma_3 s_n+\cdots+(-1)^{n+1}\sigma_n s_3$，

…

$s_k=\sigma_1 s_{k-1}-\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{n+1}\sigma_n s_{k-n}$.

这样，求 $s_k(k>n)$ 需要 $k(1+k)/2+n$ 次的乘法运算.

使用新的计算方法求出一个 s_k 的时间复杂度为 $O(k^2)$，而一般的求 k 次幂的时间复杂度为 $O(k^{k-1})$[11]，说明这是一种高效快速的计算方法.

例 求 $s_k=1^k+4^k+7^k+10^k+13^k+16^k+19^k$.

解 使用 Maple 软件举例说明算法的实现过程. fjs _ maple()的过程文件如下：

```
with(PolynomialTools);
fjs_maple:=proc()
local i;s:='x-1';
for i from 4 by 3 to 19 do
  s:=expand(s*(x-i)); od;
a:=CoefficientList(s,x);
b:=convert(a,array);
c:=array(1..7,[]);
  for i from 1 to 7 do
c[i]:=((-1)^i)*b[8-i]; od;
z:=array(1..12,[]);
z[1]:=c[1];
for i from 2 to 7 do
  j:=i; r:=1; s1:=0;
  while j>1 do
    s1:=s1+((-1)^(r+1))*c[r]*z[j-1];
    j:=j-1; r:=r+1; od;
  z[i]:=s1+((-1)^(i+1))*i*c[i];
od;
print(z);
# Newton formula second kind
for i from 8 to 12 do
  j:=i; r:=1; s1:=0;
  while r<=7 do
    s1:=s1+((-1)^(r+1))*c[r]*z[j-1];
    j:=j-1; r:=r+1; od;
  z[i]:=s1;
od;
print(z);
end;
```

运行过程 fjs _ maple()，得到的运行结果为：

$x^7-70x^6+1974x^5-28700x^4+227969x^3-959070x^2+1864456x-1106560$，

[70,925,14560,2307076,4013800,69771652,1235895640,22200091396,403052289640,7378719901252,135976586857720,2519101838963716].

即 $s_1=70,s_2=925,s_3=14560,s_4=237076,\cdots$

3 结束语

本文提出一种新的数值计算方法，可以求出比自然数等幂和更广泛的一类等幂和，从而快速地解决了任意实数的等幂和问题.

参考文献：

[1] 龚飞兵. 自然数幂和公式的另一种计算机实现方法[J]. 数学的实践与认识，2006，36(8)：364-366.

[2] 孙哲，殷喜荣. 用线性方程组与 Mathematica 软件求解两类自然数幂和公式[J]. 数学的实践与认识，2006，36(5)：184-187.

[3] 孙哲，殷喜荣. 用三个关系式与 Mathematica 软件求第二类自然数幂和公式[J]. 数学的实践与认识，2006，36(4)：288-291.

[4] 孙哲，殷喜荣. Bernoulli 多项式的积分多项式[J]. 数学的实践与认识，2005，35(5)：152-158.

[5] 孙哲. 一个计算幂和多项式的积分递推公式[J]. 数学的实践与认识，2004，34(12)：149-153.

[6] 孙哲，殷喜荣. Bernoulli 多项式的积分多项式[J]. 数学的实践与认识，2005，35(2)：152-158.

[7] 孙哲. 求幂和公式的三种方法[J]. 高等数学研究，2004，7(1)：25-27.

[8] 王云葵. 关于 Bernoulli 数的同余关系[J]. 广西科学，1999，6(4)：250-252.

[9] 王云葵. 等幂和与 Bernoulli 数的通解公式[J]. 广西大学学报，1999，24(4)：318-320.

[10] 陈志杰. 高等代数与解析几何[M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[11] 李强. Maple8基础应用教程[M]. 北京：中国水利水电出版社，2004.

(责任编辑：韦廷宗)