

多个简谐振动的合成*

Synthesis of Multiple Simple Harmonic Vibrations

蓝海江
LAN Hai-jiang

(柳州师范高等专科学校物理与信息科学系, 广西柳州 545004)
(Department of Physics and Information Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要:在一维、二维及三维坐标中合成多个同频率、不同频率简谐振动,并基于 MATLAB 软件绘出不同频率简谐振动合成的波形及轨迹.结果显示,多个一维同频率简谐振动可合成为一个同频率的简谐振动; n 个一维同振幅、同相位频率相差不大简谐振动的合成结果是形成 $(n-1)$ 个拍;多个二维同频率简谐振动的合振动是两个相互垂直同频率简谐振动的叠加,合振动的轨迹为椭圆;多个三维同频率简谐振动的合振动是3个相互垂直同频率简谐振动的叠加,合振动的轨迹为椭圆.多个一维频率比为有理数简谐振动的合振动具有周期性,而多个一维频率比为无理数简谐振动的合振动则无周期性;多个二维、三维频率比为有理数简谐振动合成的轨迹是稳定的闭合曲线,而多个二维、三维频率比为无理数简谐振动合成的轨迹则是复杂的非闭合曲线.

关键词:简谐振动 合成 MATLAB 波形 轨迹

中图分类号: O321 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2009)01-0022-04

Abstract: This paper analyzes the synthesis of multiple simple harmonic vibration with same or different frequency in one-dimensional, 2-d, 3-d coordinate. Based on Matlab, descriptions on wave form and locus of the synthesis with different frequency are made. The results showed that the multiple simple harmonic vibrations with same frequency in 1-d can be synthesized as one vibration. N -vibrations of simple harmonic with same amplitude, same phase and little frequency difference can be synthesized as $(n-1)$ beats. The synthesis of multiple simple harmonic vibrations in 2-d or 3-d with same frequency is superposition, which is two or three vibrations of mutually perpendicular, and their synthesis locus is an ellipse. When the frequency ratio is a rational number, the synthesis of multiple simple harmonic vibrations in 1-d is periodicity, which on the contrary is not periodicity. Under the same conditions, the synthesis locus of multiple simple harmonic vibrations in 2-d, 3-d is a closed curve, which on the contrary is a non-closed curve.

Key words: simple harmonic vibration, synthesis, MATLAB, wave form, locus

简谐振动的合成既是力学的主要内容也是光波叠加的理论基础.由于多个简谐振动合成的结果比较复杂,因而,不少文献都只讨论两个简谐振动在一、二维坐标中的合成情况^[1,2].与两个简谐振动的合成相比,多个简谐振动的合成比较复杂,但是其更具有普遍性.本文探讨多个同频率、不同频率简谐振动在一、二及三维坐标中的合成,并利用 MATLAB

软件绘出不同频率简谐振动合成的波形及轨迹.

1 多个同频率简谐振动的合成

1.1 多个一维同频率简谐振动的合成

设质点在 x 方向上同时参与 n 个同频率简谐振动,振动方程为 $x_l = A_{x_l} \cos(\omega t + \varphi_l)$, $l = 1, 2, \dots, n$. 其中, A_{x_l} 为振幅, ω 为角频率, φ_l 为初相位, 则质点的合振动为^[3]

$$x = \sum_{l=1}^n x_l = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad (1)$$

式中, $A_x = \left[\left(\sum_{l=1}^n A_{x_l} \cos \varphi_l \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^n A_{x_l} \sin \varphi_l \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ 和

收稿日期: 2008-10-12

作者简介: 蓝海江(1963-), 男, 副教授, 主要从事基础物理及计算机应用教学与研究.

* 柳州师范高等专科学校基金项目“MATLAB 在基础物理教学中的应用(LSZ2006B001)”资助.

$\varphi_x = \arctan(\sum_{l=1}^n A_{xl} \sin \varphi_l / \sum_{l=1}^n A_{xl} \cos \varphi_l)$ 分别为合振动的振幅及初相位. 由(1)式可知, 多个一维同频率简谐振动可合成为一个同频率的简谐振动, 其轨迹是余弦(或正弦)曲线.

1.2 多个二维同频率简谐振动的合成

设质点在 xy 二维平面内同时参与 n 个同频率简谐振动, 振动方程为 $\vec{r}_l = A_l \cos(\omega t + \varphi_l) \vec{r}_{l0} = A_{xl} \cos(\omega t + \varphi_l) \vec{i} + A_{yl} \cos(\omega t + \varphi_l) \vec{j}, l = 1, 2, \dots, n$. 其中, \vec{r}_l 为振动位移矢量, $\vec{r}_{l0} = \cos \alpha_l \vec{i} + \sin \alpha_l \vec{j}$ 为单位矢量(α_l 为 \vec{r}_l 与 x 轴的夹角), $A_{xl} = A_l \cos \alpha_l, A_{yl} = A_l \sin \alpha_l$. 依据一维同频率简谐振动合成的结论, 质点的合振动为

$$\vec{r} = \sum_{l=1}^n \vec{r}_l = x \vec{i} + y \vec{j} = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{i} + A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \vec{j}, \quad (2)$$

(2) 式中, A_x, φ_x 及 A_y, φ_y 分别为 x, y 方向上合振动的振幅及初相位. 由(2)式可知, 多个二维同频率简谐振动的合振动是两个相互垂直的同频率简谐振动的叠加.

(2) 式消去参数 t 得

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2 \frac{xy}{A_x A_y} \cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x), \quad (3)$$

由(3)式可知, 合振动的轨迹为椭圆.

1.3 多个三维同频率简谐振动的合成

设质点在 xyz 三维坐标系内同时参与 n 个同频率简谐振动, 振动方程为 $\vec{r}_l = A_l \cos(\omega t + \varphi_l) \vec{r}_{l0} = A_{xl} \cos(\omega t + \varphi_l) \vec{i} + A_{yl} \cos(\omega t + \varphi_l) \vec{j} + A_{zl} \cos(\omega t + \varphi_l) \vec{k}, l = 1, 2, \dots, n$. 其中, $\vec{r}_{l0} = \cos \alpha_l \vec{i} + \cos \beta_l \vec{j} + \cos \gamma_l \vec{k}$ ($\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$ 分别为 \vec{r}_l 与 x, y 及 z 轴的夹角), $A_{xl} = A_l \cos \alpha_l, A_{yl} = A_l \cos \beta_l, A_{zl} = A_l \cos \gamma_l$. 同理, 依据一维同频率简谐振动合成的结论, 质点的合振动为

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{i} + A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \vec{j} + A_z \cos(\omega t + \varphi_z) \vec{k}, \quad (4)$$

式中, A_x, φ_x 为 z 方向上合振动的振幅及初相位. 由(4)式可知, 多个三维同频率简谐振动的合振动是 3 个相互垂直的同频率简谐振动的叠加.

(4) 式消去参数 t 得^[4]

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} + \frac{z^2}{A_z^2} - \frac{xy \cos(\varphi_y - \varphi_x)}{A_x A_y} - \frac{yz \cos(\varphi_z - \varphi_y)}{A_y A_z} - \frac{zx \cos(\varphi_z - \varphi_x)}{A_z A_x} = \frac{1}{2} [\sin^2(\varphi_y - \varphi_x) + \sin^2(\varphi_z - \varphi_y) + \sin^2(\varphi_z - \varphi_x)], \quad (5)$$

由(5)式可知, 合振动的轨迹也是椭圆.

2 多个不同频率简谐振动的合成

2.1 多个一维不同频率简谐振动的合成

一般情况下, 多个不同频率简谐振动的合振动不再是简谐振动, 而是复杂的运动.

为简单起见, 首先讨论两个同振幅、同相位不同频率简谐振动的合成. 设质点在 x 轴方向上同时参与两个振动方程分别为 $x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$ 及 $x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi)$ 的振动, 则质点的合振动为^[5]

$$x = x_1 + x_2 = A(t) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right), \quad (6)$$

式中, $A(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$. 由(6)式可知, 合振动为振幅作周期变化的高频振动. 若两个简谐振动的频率相差不大, 即 $\omega_1 + \omega_2 \gg \omega_2 - \omega_1$ (设 $\omega_2 > \omega_1$), 则合振动是一个振幅随时间作周期性缓慢变化的高频振动, 这种现象称为拍.

其次, 讨论 3 个同振幅、同相位不同频率简谐振动的合成情况. 设质点在 x 轴方向上同时参与振动方程分别为 $x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi), x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi)$ 及 $x_3 = A \cos(\omega_3 t + \varphi)$ 的振动, 此时, 质点的合振动为^[6]

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right) + A \cos\left(\frac{\omega_3 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_3}{2} t + \varphi\right) + A \cos\left(\frac{\omega_3 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_3}{2} t + \varphi\right). \quad (7)$$

由(7)式可知, 若 3 个简谐振动的振动频率相差不大(设 $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$), 则合振动为 3 个拍的叠加, 这 3 个拍是 3 个简谐振动中两两合成的结果. 此时, 两两合成的拍幅度是单独两个简谐振动合成的拍幅度的一半. 若是 n 个此类简谐振动的合成, 则两两合成的拍幅度是单独两个简谐振动合成的拍幅度的 $1/(n-1)$.

设有 5 个振幅、相位及频率都不相同的简谐振动, 振动方程分别为 $x_1 = 2.5 \cos(30\pi t + \frac{\pi}{3}), x_2 = 0.6 \cos(2\pi t - \frac{\pi}{6}), x_3 = 1.2 \cos(10\pi t + \frac{\pi}{2}), x_4 = 1.5 \cos(50\pi t - \frac{\pi}{7})$ 及 $x_5 = 0.3 \cos(20\pi t + \frac{\pi}{5})$. 利用 MATLAB 可绘出它们合成的波形, 如图 1(a) 所示.

设另有 5 个同振幅、同相位、频率相差不大的简谐振动, 它们的振动方程为 $x_1 = \cos(30\pi t), x_2 =$

$\cos(31\pi t)$ 、 $x_3 = \cos(32\pi t)$ 、 $x_4 = \cos(33\pi t)$ 及 $x_5 = \cos(34\pi t)$ 。同理,利用 MATLAB 可绘出它们合成的波形,如图 1(b) 所示。

由图 1(a)可知,一般情况下,多个一维不同频率简谐振动的合成是复杂的振动。利用 MATLAB 进一步研究可知,多个一维频率比为有理数简谐振动的合振动虽然复杂但具有周期性(参见图 1(a)),而多个一维频率比为无理数简谐振动的合振动则既复杂又无周期性。由图 1(b)可知,多个一维同振幅、同相位频率相差不大简谐振动的合成,其结果形成多个大小不一的拍。进一步研究可知, n 个一维同振幅、同相位频率相差不大简谐振动的合振动是这些简谐振动两两合成的幅度减小的拍的叠加,其结果形成 $n-1$ 个大小不一的拍——多拍现象。其中,主拍的拍幅很大(为单个简谐振动振幅的 n 倍),而次拍的拍幅则比较小。

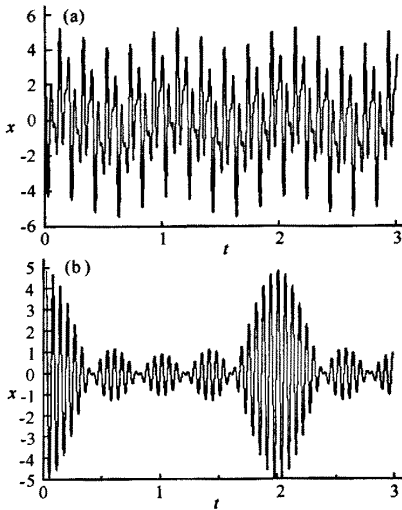


图 1 5 个一维不同频率简谐振动合成的波形

(a)振幅、相位及频率都不相同;(b)同振幅、同相位、不同频率

2.2 多个二维不同频率简谐振动的合成

设质点在 xy 平面内同时参与 n 个不同频率的简谐振动,振动方程为 $\vec{r}_l = A_l \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{r}_0 = A_{xl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{i} + A_{yl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{j}, l = 1, 2, \dots, n$ 。则质点的合振动为

$$\vec{r} = \sum_{l=1}^n \vec{r}_l = \sum_{l=1}^n A_{xl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{i} + \sum_{l=1}^n A_{yl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{j}, \quad (8)$$

由(8)式可知,一般情况下,多个二维不同频率简谐振动的合成是复杂的运动。

设质点同时参与两个互相垂直不同频率的简谐振动,其振动方程为

$$\begin{cases} x = A_x \cos(n_1 \omega t + \varphi_x), \\ y = A_y \cos(n_2 \omega t + \varphi_y). \end{cases} \quad (9)$$

(9)式消去变量 t 得^[7]

$$\cos^{-1}\left(\frac{y}{A_y}\right) - \frac{n_2}{n_1} \cos\left(\frac{x}{A_x}\right) = \varphi_y - \frac{n_2}{n_1} \varphi_x. \quad (10)$$

由(10)式可知,一般情形下,两个互相垂直不同频率简谐振动的合成结果比较复杂,其轨迹也不稳定,但是当它们的频率比为有理数时,合振动的轨迹能形成稳定的利萨如图形^[8]。

设有两个振动方程为 $x = 1.5 \cos(10n_1 \pi t + \frac{\pi}{3})$

及 $y = 2 \cos(10n_2 \pi t + \frac{\pi}{6})$ 的简谐振动。若 $n_1 = 1$ 及 $n_2 = \sqrt{3}$,则利用 MATLAB 绘出的它们合成的轨迹($t = 0 \sim 0.5s$; t 越大,轨迹越复杂)如图 2(a)所示;若 $n_1 = 2, n_2 = 3$,则它们合成的轨迹($t > 0.2s$ 后,曲线闭合轨迹无变化)如图 2(b)所示。

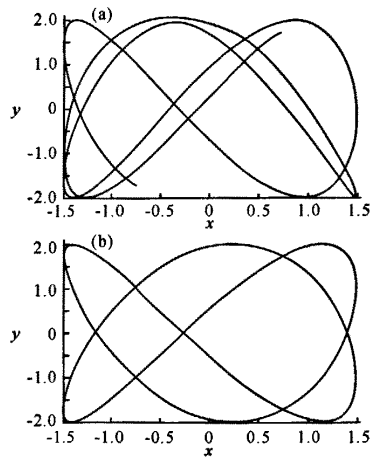


图 2 两个互相垂直不同频率简谐振动合成的轨迹

(a)频率比为无理数;(b)频率比为有理数

由图 2 可知,当两个互相垂直简谐振动的频率比为无理数时,其合振动的轨迹不能形成闭合的图形,而当它们的频率比为有理数时,合振动的轨迹能形成稳定的利萨如图形。

2.3 多个三维不同频率简谐振动的合成

设质点在 xyz 三维坐标系内同时参与 n 个不同频率的简谐振动,振动方程为 $\vec{r}_l = A_l \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{r}_0 = A_{xl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{i} + A_{yl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{j} + A_{zl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{k}, l = 1, 2, \dots, n$ 。则质点的合振动为

$$\vec{r} = \sum_{l=1}^n \vec{r}_l = \sum_{l=1}^n A_{xl} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \vec{i} +$$

$$\sum_{i=1}^n A_{y_i} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \vec{j} + \sum_{i=1}^n A_{z_i} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \vec{k}. \quad (11)$$

由(11)式可知,一般情况下,多个三维不同频率简谐振动的合成是更复杂的运动。

设有5个振动方程分别为 $\vec{r}_1 = \cos(10n_1\pi t + \frac{\pi}{9})(\cos(\frac{\pi}{2})\vec{i} + \cos(\frac{\pi}{5})\vec{j} + \cos(\frac{3\pi}{10})\vec{k})$, $\vec{r}_2 = 1.2\cos(10n_2\pi t + \frac{\pi}{12})(\cos(\frac{\pi}{3})\vec{i} + \cos(\frac{\pi}{5})\vec{j} + \cos(\frac{7\pi}{15})\vec{k})$, $\vec{r}_3 = 0.6\cos(10n_3\pi t + \frac{\pi}{3})(\cos(\frac{\pi}{9})\vec{i} + \cos(\frac{\pi}{4})\vec{j} + \cos(\frac{23\pi}{36})\vec{k})$, $\vec{r}_4 = 1.5\cos(10n_4\pi t - \frac{\pi}{4})(\cos(\frac{\pi}{3})\vec{i} + \cos(\frac{\pi}{3})\vec{j} + \cos(\frac{\pi}{3})\vec{k})$ 及 $\vec{r}_5 = 0.8\cos(10n_5\pi t + \frac{\pi}{5})(\cos(\frac{\pi}{6})\vec{i} + \cos(\frac{\pi}{3})\vec{j} + \cos(\frac{\pi}{2})\vec{k})$ 的简谐振动。若 $n_1 = 1, n_2 = \sqrt{3}, n_3 = \sqrt{5}, n_4 = \sqrt{7}$ 及 $n_5 = \sqrt{11}$, 则利用 MATLAB 绘出的它们合成的轨迹 ($t = 0 \sim 0.535s$; t 越大, 轨迹越复杂) 如图 3(a) 所示; 若 $n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 7$ 及 $n_5 = 11$, 则它们合成的轨迹 ($t > 0.2s$ 后, 曲线闭合轨迹无变化) 如图 3(b) 所示。

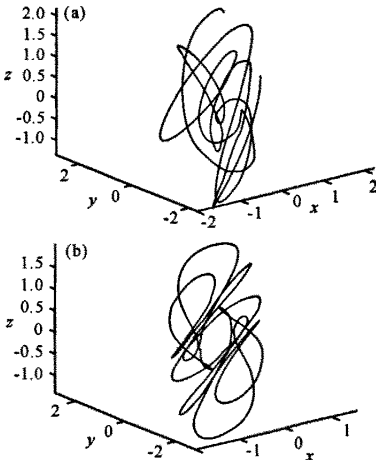


图3 五个三维不同频率简谐振动合成的轨迹
(a)频率比为无理数;(b)频率比为有理数

由图3可知,当多个三维简谐振动的频率比为无理数时,其合成的轨迹不能形成闭合的曲线;而当它们的频率比为有理数时,合成的轨迹能形成稳定

的闭合曲线。

3 结论

多个一维同频率简谐振动可合成为一个同频率的简谐振动; n 个一维同振幅、同相位频率相差不大的简谐振动的合成结果是形成 $(n-1)$ 个拍;多个二维同频率简谐振动的合振动是两个相互垂直同频率简谐振动的叠加,合振动的轨迹是椭圆;多个三维同频率简谐振动的合振动是3个相互垂直同频率简谐振动的叠加,合振动的轨迹也为椭圆。

多个一维频率比为有理数简谐振动的合振动具有周期性,而多个一维频率比为无理数简谐振动的合振动则无周期性;多个二、三维频率比为有理数简谐振动合成的轨迹是稳定的闭合曲线,而多个二、三维频率比为无理数简谐振动合成的轨迹则是复杂的非闭合曲线。

利用 MATLAB 可以方便地绘出多个简谐振动合成的波形及轨迹,结果直观而易于理解。

参考文献:

- [1] 全桂英. Mathematica 在简谐振动合成分析中的应用[J]. 安庆师范学院学报:自然科学版,2007,13(4):80-83.
- [2] 杨斌. 用 MATLAB 研究光学拍[J]. 固原师专学报:自然科学,2004,25(6):27-29.
- [3] 李京颖,彭晓伟. 同频简谐振动合成的一般规律[J]. 阜阳师范学院学报:自然科学版,2007,24(3):40-42.
- [4] 康文秀. 同频率互相垂直简谐振动的合成[J]. 物理与工程,2005,15(6):26-31.
- [5] 王宁星. 拍图形的对称性[J]. 广州大学学报:自然科学版,2002,1(5):89-91.
- [6] 吴俊,张毓麟,晏世雷,等. 三个简谐振动合成的拍现象和实验仪[J]. 物理与工程,2008,18(3):38-40.
- [7] 孙福玉. 利用 MATLAB 的图形用户界面设计交互式演示实验[J]. 赤峰学院学报:自然科学版,2008,24(1):71-74.
- [8] 杨继先. 相互垂直的谐振动合成轨迹研究[J]. 西华大学学报:自然科学版,2008,27(2):76-78.

(责任编辑:韦廷宗)