广西科学院学报 2009,25(2):83~85,91
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 25, No. 2 May 2009

P-矩阵子类的一些推广及应用

Generalizing Some Subclasses of P-matrices

王 静
WANG Jing

(电子科技大学应用数学学院,四川成都 610054)
(School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan, 610054, China)

摘要:给出 MB^+ - 矩阵的概念,讨论其简单性质,应用这些性质来定位矩阵的特征值包含区域,并举例来验证定位方法的有效性.该定位方法优于一些已知结果.

关键词:P- 矩阵 B- 矩阵 M- 矩阵 MB- 矩阵 特征值的估计

中图法分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)02-0083-03

Abstract: The defination of MB^+ - matrix is given and its properties that are used to localize the real eigenvalues of a real matrix, and an example is given to verify the effectiveness of this method. The method is better than some other known results.

Key words: P-matrices, B-matrices, M-matrices, MB-matrices, eigenvalues localization

一个实方阵 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,如果其所有主子式都为正,则 A 被称为 P- 矩阵[1].文献[2]介绍了包含 B- 矩阵的另一个 P- 矩阵类 DB- 矩阵,研究 DB- 矩阵的一些性质并且定位了一个实矩阵的实特征值.文献[3]定义 P- 矩阵的一类子矩阵 MB- 矩阵,介绍广义 MB- 矩阵,研究其性质,并定位一个实矩阵的实特征值.本文在此基础上定义 P- 矩阵的另一个子类 MB^+ - 矩阵,研究其性质,并用这些性质来定位矩阵的特征值包含区域.

1 基本概念及引理

设 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,如果 A 满足

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}>0,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}>a_{ij},\forall\ j\neq i,i=1,\cdots,n,\tag{1.1}$$

则称 A 为 B- 矩阵[4].B- 矩阵也是 P- 矩阵.(1.1)式这个特征被用来定位一个实矩阵的实特征值.

引理 1.1[4] 设 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是一个实矩阵,λ 是 A 的一个实特征值,那么

$$\lambda\in\zeta:=\bigcup_{i=1}^{n}\zeta_i,\tag{1.2}$$

其中

$$\zeta:=[a_{ii}-r_i^+-\sum_{k\neq i}|r_i^+-a_{ik}|,a_{ii}-r_i^-+\sum_{k\neq i}|r_i^--a_{ik}|],$$

$$r_i^+:=\max\{0,a_{ij}|j\neq i\},r_i^-:=\min\{0,a_{ij}|j\neq i\}.\tag{1.3}$$

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,$A$ 的对角元满足 $a_{kk}>r_k^+$,$\forall\ k\in\{1,2,\cdots,n\}$,如果对 N 中所有 $i\neq j$,有

$$(a_{ii}-r_i^+)(a_{jj}-r_j^+)>(\sum_{k\neq j}(r_i^+-a_{ik}))(\sum_{k\neq j}(r_j^+-a_{jk})),\tag{1.4}$$

成立,则称 A 为 DB- 矩阵.

引理 1.2[2] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,$r_i^+$,$r_i^-$ 形如(1.3)式,$C_i:=[a_{ii}-r_i^+,a_{ii}-r_i^-]$,$i=1,\cdots,n$,$j\neq i$,定义(不失一般性,设 $a_{ii}<a_{jj}$)

$$B_{ij}:=B_{ij}^1\cup B_{ij}^2\cup B_{ij}^3,\tag{1.5}$$

其中

$B_{ij}^1:=\{x\in(-\infty,a_{ii}):|a_{ii}-r_i^+-x\|a_{jj}-r_j^+-x|\leqslant R_i(B_+)R_j(B_+)\}$,$B_{ij}^2:=\{x\in(a_{ii},a_{jj}):|a_{ii}-r_i^--x\|a_{jj}-r_j^+-x|\leqslant R_i(B_-)R_j(B_+)\}$,$B_{ij}^3:=\{x\in(a_{jj},\infty):|a_{ii}-r_i^--x\|a_{jj}-r_j^--x|\leqslant R_i(B_-)R_j(B_-)\}$,

收稿日期:2008-06-24
修回日期:2008-12-30
作者简介:王 静(1985-),女,硕士研究生,主要从事大型矩阵研究。

则 A 的所有特征值都属于

$$B := (\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \cup (\bigcup_{i \neq j} B_{ij}). \tag{1.6}$$

2 P-矩阵子类的推广

设 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$，$B^+$，$C$ 形如(1.1)式和(1.2)式. 如果 B^+ 是一个 M-矩阵，则 A 被称为 MB-矩阵[3].

$$A = B^+ + C, A = B^- + F,$$

$$B^+ = \begin{bmatrix} a_{11}-r_1^+ & a_{12}-r_1^+ & \cdots\cdots & a_{1n}-r_1^+ \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}-r_n^+ & a_{n2}-r_n^+ & \cdots\cdots & a_{nn}-r_n^+ \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} r_1^+ & \cdots & r_1^+ \\ \vdots & \vdots & \\ r_n^+ & \cdots & r_n^+ \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$B^- = \begin{bmatrix} a_{11}-r_1^- & a_{12}-r_1^- & \cdots\cdots & a_{1n}-r_1^- \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}-r_n^- & a_{n2}-r_n^- & \cdots\cdots & a_{nn}-r_n^- \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} r_1^- & \cdots & r_1^- \\ \vdots & \vdots & \\ r_n^- & \cdots & r_n^- \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$c_j^+ := \max\{0, a_{ii} \mid i \neq j\}, c_j^- := \min\{0, a_{ij} \mid i \neq j\}, \tag{2.3}$$

$$r_i := \begin{cases} r_i^+, a_{ii} > 0 \\ r_i^-, a_{ii} < 0 \end{cases}, j = 1, \cdots\cdots, n, c_j := \begin{cases} c_j^+, a_{jj} > 0 \\ c_j^-, a_{jj} < 0 \end{cases}, i = 1, \cdots\cdots, n, \tag{2.4}$$

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，对任意 $i\in N$，有 $A=B^{++}+R$，$A=B^{--}+I$，

其中，

$$B^{++} = \begin{bmatrix} a_{11}-r^+ & a_{12}-r^+ & \cdots\cdots & a_{1n}-r^+ \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}-r^+ & a_{n2}-r^+ & \cdots\cdots & a_{nn}-r^+ \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} r^+ & \cdots & r^+ \\ \vdots & \vdots & \\ r^+ & \cdots & r^+ \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$B^{--} = \begin{bmatrix} a_{11}-r^- & a_{12}-r^- & \cdots\cdots & a_{1n}-r^- \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}-r^- & a_{n2}-r^- & \cdots\cdots & a_{nn}-r^- \end{bmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} r^- & \cdots & r^- \\ \vdots & \vdots & \\ r^- & \cdots & r^- \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$r^+ := \max\{r_i^+ \mid j \neq i\}, r^- := \min\{r_i^- \mid j \neq i\}, \tag{2.7}$$

$$c^+ := \max\{c_i^+ \mid i \neq j\}, c^- := \min\{c_i^- \mid i \neq j\}, \tag{2.8}$$

$$r_i := \begin{cases} r^+, a_{ii} > 0 \\ r^-, a_{ii} < 0 \end{cases}, i = 1, \cdots, n, c := \begin{cases} c^+, a_{ii} > 0 \\ c^-, a_{ii} < 0 \end{cases}, i = 1, \cdots, n. \tag{2.9}$$

易知 B^{++} 所有非对角元都是非正的，B^{--} 的所有非对角元都是非负的. 由 r^+，r^-，c^+，c^- 和 r，c 的定义我们可以推知 $r^+=c^+$，$r^-=c^-$，则 $r=c$.

定义 2.1 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，$B^{++}$，$R$ 形如(2.5)式和(2.7)式. 如果 B^{++} 是一个 M-矩阵，则称 A 为 MB^+-矩阵.

定理 2.1 如果 B^{++} 是一个 $n\times n$ 非奇异的 M-矩阵，R 是一个非负的 $n\times n$ 矩阵，$\mathrm{rank}(R)=1$，那么 $A=B^{++}+R$ 是一个 P-矩阵.

证明 因为非奇异 M-矩阵的主子矩阵是非奇异 M-矩阵. 再由文献[2]中的定理 2.2 和推论 2.4，可知定理 2.1 成立.

引理 2.1[5] 如果 A 是个 Z-矩阵，那么 A 是 M-矩阵当且仅当 $A+\varepsilon I$ 是非奇异的，对任意的 $\varepsilon\geqslant 0$，并且 I 是单位矩阵.

引理 2.2[6] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是个 Z-矩阵，满足 $a_{ii}>0$，$B=A+A^+\in D$，则 A 是 M-矩阵.

定理 2.2 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，对 N 中的所有 $i\neq j$，B^{++} 满足条件：(1) $a_{ii}>r^+$，$i\in N$；(2) $(a_{ii}-r^+)(a_{jj}-r^+) > (\sum_{i\neq k}(r^+-a_{ik}))(\sum_{j\neq k}(r^+-a_{jk}))$，则 A 是 MB^+-矩阵.

证明 由(1)和(2)，我们知道矩阵 B^{++} 是非奇异的. 那么 $B^{++}+\varepsilon I$ 和 B^{++} 有相同的非对角元，其中 $\varepsilon\geqslant 0$，则

$$(a_{ii}-r^++\varepsilon)(a_{jj}-r^++\varepsilon) > (a_{ii}-r^+)(a_{jj}-r^+) > (\sum_{i\neq k}(r^+-a_{ik}))(\sum_{j\neq k}(r^+-a_{jk})),$$

那么 $B^{++}+\varepsilon I$ 也是非奇异的. 由引理 2.1，B^{++} 是 M-矩阵，则 A 是 MB^+-矩阵.

定理 2.3 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，如果 B^{++} 满足 (1) $a_{ii}>r^+$，$i\in N$；(2) $a_{ii}-r^+ > \frac{1}{2}(\sum_{i\neq k}(r^+-a_{ik}) + \sum_{k\neq i}(r^+-a_{ki}))$，则 A 是 MB^+-矩阵.

3 定位实矩阵实特征值的包含区域

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若 A 满足

$$|a_{ii}||a_{jj}| > (\sum_{i\neq k}|a_{ik}|)(\sum_{k\neq j}|a_{jk}|), i,j\in N, \tag{3.1}$$

则 A 称为严格双对角占优矩阵(称为 DD 矩阵)；若 A^{T} 为严格双对角占优矩阵，则满足

$$|a_{ii}||a_{jj}|>(\sum_{k\neq i}|a_{ki}|)(\sum_{j\neq k}|a_{kj}|)).\qquad(3.2)$$

定义 3.1　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若 A 满足

$$|a_{ii}|^2|a_{ij}|^2>(\sum_{i\neq k}|a_{ik}|)(\sum_{k\neq i}|a_{ki}|)\cdot(\sum_{k\neq j}|a_{jk}|(\sum_{j\neq k}|a_{kj}|)),\qquad(3.3)$$

则称 A 为$\overline{DD}$ 矩阵.

定义 3.2　如果一个实矩阵具有 DA 这种形式，我们把这个矩阵叫做广义 MB^+-矩阵，其中 D 是一个对角元属于$\{1,-1\}$的对角矩阵，A 是一个 MB^+-矩阵. 如果 A 是$\overline{DD}$ 矩阵，则称 A 为广义$\overline{DD}$ 矩阵.

定理 3.1　设 r 形如(2.9)式且 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，具有非零的对角元，则 A 是广义$\overline{DD}$ 矩阵的充要条件为 $|a_{ii}|>|r|$(对任意 $i\neq j,i=1,\cdots,n$)，且 1) $|a_{ii}-r|>(\sum_{i\neq j}|r-a_{ii}|)$；2) $|a_{ii}-r||a_{jj}-r|>(\sum_{i\neq k}|r-a_{ik}|)(\sum_{k\neq j}|r-a_{jk}|)$；3) $|a_{ii}-r|^2|a_{jj}-r|^2>(\sum_{i\neq k}|r-a_{ik}|)(\sum_{k\neq i}|r-a_{ki}|)(\sum_{k\neq j}|r-a_{jk}|(\sum_{j\neq k}|r-a_{kj}|))$.

证明　设 D 是一个对角元属于$\{1,-1\}$的对角矩阵，r^+,r^- 形如(2.7)式. 当 $a_{ii}>0$ 时，DA 的第 i 行形如$(a_{i1},\cdots,a_{in})$；当 $a_{ii}<0$ 时，DA 的第 i 行形如$(-a_{i1},\cdots,-a_{in})$；如果 $a_{ii}>0$，则 $|a_{ii}|>|r|$ 成立当且仅当 $a_{ii}>r^+$；如果 $a_{ii}<0$，则 $|a_{ii}|>|r|$ 成立当且仅当 $a_{ii}<r^-$. 那么，DA 是$\overline{DD}$ 矩阵当且仅当下列条件成立.

如果 $a_{ii}>0,a_{jj}>0$，那么

$$(a_{ii}-r^+)^2(a_{jj}-r^+)^2>(\sum_{i\neq k}(r^+-a_{ik}))(\sum_{j\neq k}(r^+-a_{jk}))(\sum_{k\neq i}(r^+-a_{ki}))(\sum_{k\neq j}(r^+-a_{kj})).$$

如果 $a_{ii}<0,a_{jj}<0$，那么

$$(-a_{ii}-(-r^-))^2(-a_{jj}-(-r^-))^2>(\sum_{i\neq k}(-r^--(-a_{ik})))(\sum_{j\neq k}(-r^--(-a_{jk})))(\sum_{k\neq i}(-r^--(-a_{ki})))(\sum_{k\neq j}(-r^--(-a_{kj}))).$$

如果 $a_{ii}>0,a_{jj}<0$，那么

$$(a_{ii}-r^+)^2(-a_{jj}-(-r^-))^2>(\sum_{i\neq k}(r^+-a_{ik}))(\sum_{j\neq k}(-r^--(-a_{jk})))(\sum_{k\neq i}(r^+-a_{ki}))(\sum_{k\neq j}(-r^--(-a_{kj}))).$$

如果 $a_{ii}<0,a_{jj}>0$，那么

$$(-a_{ii}-(-r^-))^2(a_{jj}-r^+)^2>(\sum_{i\neq k}(-r^--(-a_{ik})))(\sum_{j\neq k}(r^+-a_{jk}))(\sum_{k\neq i}(-r^--(-a_{ki})))(\sum_{k\neq j}(r^+-a_{kj})).$$

所有的形式都满足定理 3.1 相应的形式，所以定理 3.1 成立.

定理 3.2　设 r 形如(2.9)式且 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，对角元非零，对任意 $i\neq j,i=1,\cdots,n$. 有

$$|a_{ii}-r||a_{jj}-r|>\frac{1}{4}((\sum_{i\neq k}|r-a_{ik}|)+(\sum_{k\neq i}|r-a_{ki}|))((\sum_{j\neq k}|r-a_{jk}|)+(\sum_{k\neq j}|r-a_{kj}|)),\qquad(3.4)$$

同时 $|a_{ii}|>|r|$，那么 A 是广义 MB^+-矩阵并且非奇异.

定理 3.3　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是一个实矩阵，r^+,r^- 形如(2.7)式，

$$C_i:=[a_{ii}-r^+,a_{ii}-r^-],i\neq j,i=1,\cdots,n.\qquad(3.5)$$

那么 A 的所有实特征值属于(假定 $a_{ii}\leqslant a_{jj}$)

$$\zeta:=(\bigcup_{i=1}^{n}C_i)\cup(\bigcup_{i\neq j}\zeta_{ij})，\text{其中}\ \zeta_{ij}:=\zeta_{ij}^1\cup\zeta_{ij}^2\cup\zeta_{ii}^3,\qquad(3.6)$$

其中，

$$\zeta_{ij}^1:=\{x\in(-\infty,a_{ii}):|a_{ii}-r^+-x|^2|a_{jj}-r^+-x|^2\leqslant R_i(B^{++})R_j(B^{++})C_i(B^{++})C_j(B^{++})\},$$

$$\zeta_{ij}^2:=\{x\in(a_{ii},a_{jj}):|a_{ii}-r^--x|^2|a_{jj}-r^+-x|^2\leqslant R_i(B^{--})R_j(B^{++})C_i(B^{--})C_j(B^{++})\},$$

$$\zeta_{ij}^3:=\{x\in(a_{jj},\infty):|a_{ii}-r^--x|^2|a_{jj}-r^--x|^2\leqslant R_i(B^{--})R_j(B^{--})C_i(B^{--})C_j(B^{--})\}.$$

证明　设 λ 是 A 的一个实特征值，实矩阵 $A-\lambda I$ 和 A 有相同的非对角元. 假设 $\lambda\notin\zeta$，则 $\lambda\notin(\bigcup_{i=1}^{n}C_i)$ 和 $\lambda\notin(\bigcup_{i\neq j}\zeta_{ij})$. 如果 $\lambda\notin(\bigcup_{i=1}^{n}C_i)$，则对任意 $i=1,\cdots,n$ 有 $|a_{ii}-\lambda|>r$；如果 $\lambda\notin(\bigcup_{i\neq j}\zeta_{ij})$，则由定理 3.1 有 $A-\lambda I$ 是广义$\overline{DD}$ 矩阵，因为广义$\overline{DD}$ 矩阵非奇异，所以 $A-\lambda I$ 非奇异.

注　定理 3.3 是对文献[7]中的盖尔圆定理，文献[8]中的 Cassini 卵形域以及文献[2]中的定理 3.3 关于实特征值包含域的一个补充.

(下转第 91 页)

$$|D_l\cap E_j|(1-\frac{|D_l\cap E_j|}{|E_j|})\geqslant\sum_{t\in T_j}|D_l\cap C_t|(1-\frac{|D_l\cap C_t|}{|C_t|}).$$

若存在 $1\leqslant l\leqslant r$,或 $1\leqslant j\leqslant n$ 使得上述不等式的严格不等号成立,则

$$\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}|D_l\cap E_j|(1-\frac{|D_l\cap E_j|}{|E_j|})>\sum_{l=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t\in T_j}|D_l\cap C_t|(1-\frac{|D_l\cap C_t|}{|C_t|}).$$

这样 $E(D|B)>E(D|A)$,与 B 是 S 的相对信息熵协调集矛盾.

定理 2 给出相对信息熵协调集判定定理,由此不难得到计算 S 的相对信息熵约简的方法.

定理 3　设 $S=(U,A/D)$ 是决策表,$B\subseteq A$. 若 B 是 S 的分布协调集,那么 B 也是 S 的相对信息熵协调集.

证明　$\forall x\in U$,记 $J_{x,B}=\{[y]_A:[y]_A\subseteq[x]_B\}$,则 $J_{x,B}$ 是 $[x]_B$ 的划分. 由于 B 是 S 的分布协调集,故 $\forall\ 1\leqslant l\leqslant r$,$\forall\ [y]_A\in J_{x,B}$,$\frac{|D_l\cap[y]_A|}{|[y]_A|}=\frac{|D_l\cap[y]_B|}{|[y]_B|}=\frac{|D_l\cap[x]_B|}{|[x]_B|}$,于是

$$|D_l\cap[x]_B|(1-\frac{|D_l\cap[x]_B|}{|[x]_B|})=\sum_{[y]_A\in J_{x,B}}|D_l\cap[y]_A|(1-\frac{|D_l\cap[x]_B|}{|[x]_B|})=\sum_{[y]_A\in J_{x,B}}|D_l\cap[y]_A|(1-\frac{|D_l\cap[y]_A|}{|[y]_A|}).$$

由定理 2 知 B 是 S 的相对信息熵协调集.

参考文献:

[1] Zhang W X, Mi J S, Wu W Z. Approaches to knowledge reductions in inconsistent systems [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2003(18): 989-1000.
[2] Kosko B. Fuzzy entropy and conditioning[J]. Information Sciences, 1986, 40: 165-174.
[3] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京:科学出版社,2003.
[4] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.
[5] 张文修,吴伟志,梁吉业. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2001.
[6] Skowron A, Rauszer C. The discernibility matrices and functions in information systems [M]//Slowi R. Intelligent decision support. Handbook of Applications and Advances of Rough Sets Theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992: 331-362.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第 85 页)

例 3.1　考虑

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征值为 $-\sqrt{2}$,1,$\sqrt{2}$. 估计区间的结果如表 1 所示.

表 1　估计区间结果

定理	特征值包含区域
盖尔圆定理[7]	$[-2,2]$
Cassini 卵形域[8]	$[-\sqrt{2},2]$
引理 1.1[4]	$[-3,2]$
引理 1.2[2]	$[-1-\sqrt{2},2]$
定理 3.3	$[-2,-1]$,1,$[1,1.5564]$

由表 1 结果容易看出定理 3.3 的结果优于其他的定理.

参考文献:

[1] Fieldler M, Ptak V. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors [J]. J Czech Math, 1962, 87: 382-400.
[2] Peña J M. On an alternative to gerschgorin circles and ovals of cassini[J]. Numer Math, 2003, 95: 337-345.
[3] Li Houbiao, Huang Tingzhu, Li Hong. On some subclasses of P- matrices [J]. Numerical Linear Algebra Appl, 2007, 14: 391-405.
[4] Peña J M. A class of P -matrices with applications to the localization of the eigenvalues of a real matrix[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2001, 22: 1027-1037.
[5] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.
[6] 安国斌,郭希娟. 双对角占优与非奇 M- 矩阵的判定[J]. 应用数学与计算数学学报,2002,14(2):93-96.
[7] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1985.
[8] Brualdi R A. Matrices, eigenvalues and directed grtaphs[J]. Lin Multilin Alg, 1982, 11: 143-165.

(责任编辑:尹　闯)