广西科学院学报 2009,25(2):86～88
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 25,No. 2 May 2009

三阶线性脉冲微分方程的振动性与渐近性*

Oscillatory and Asymptotic Behaviors of Third Order Differential Equations with Impulses

黄 辉,唐清干
HUANG Hui,TANG Qing-gan

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004)
(School of Mathematics and Computing Science,Guilin University of Electronic Technology, Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:给出三阶线性脉冲微分方程非振动解与其各阶导数的符号关系,得到 2 个新的判别该方程振动性与渐近性的准则,并用实例来验证其有效性.新准则改进了一些已知结果.

关键词:微分方程 脉冲 振动性 渐近性
中图法分类号:O175.12 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)02-0086-03

Abstract: According to the connection of nonoscillatory solutions and their denotation of derivative appeared in the equation, two new oscillatory conditons for oscillating and asymptotically tending to zero of solutions are obtained and verified by some examples by using new oscillatory conditons,some previous results are improved.

Key words:differntial equation,impulse,oscillation,asymptotic behavior

脉冲微分方程(IODE)振动性的研究成果广泛地应用于生物、物理、工程等领域中,已经引起众多学者的关注.近年来,对脉冲微分方程振动性的研究也取得了一些成果[1~6],但是大多研究集中在一阶或二阶的情形上,只有极少数研究二阶以上的情形[1,4,5].本文主要考虑三阶线性脉冲微分方程:

$$\begin{cases} x^{(3)}(t)+p(t)x(t)=0, t\geqslant t_0, t\neq t_k, k\in N.\\ x(t_k^+)=a_kx(t_k); x'(t_k^+)=b_kx'(t_k);\\ \quad x^{(2)}(t_k^+)=c_kx^{(2)}(t_k),\\ x(t_0^+)=x_0; x'(t_0^+)=x_0'; x^{(2)}(t_0^+)=x_0^{(2)}, \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$0<t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots, \lim_{k\to+\infty}t_k=+\infty; x'(t_k)=x'(t_k^-)=\lim_{t\to t_k^-}\frac{x(t)-x(t_k)}{t-t_k}; x'(t_k^+)=\lim_{t\to t_k^+}\frac{x(t)-x(t_k^+)}{t-t_k}, x^{(2)}(t_k)=x^{(2)}(t_k^-)=\lim_{t\to t_k^-}\frac{x'(t)-x'(t_k)}{t-t_k}; x^{(2)}(t_k^+)=\lim_{t\to t_k^+}\frac{x'(t)-x'(t_k^+)}{t-t_k},$$

且 $a_k>0, b_k>0, c_k>0 (k\in N)$, $p(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上非负且不最终恒为零.

文献[1]研究方程(1)的振动性,得到了一些好的振动准则.方程(1)解的存在在性可以参见文献[2,3].本文给出方程(1)非振动解与其各阶导数的符号关系,得到 2 个新的判别准则,用于判别方程的振动性与渐近性.新准则改进了相关文献的结果.

1 基本概念及引理

定义 1 函数 $x(t):[t_0,t_0+a)\to R, t_0\geqslant 0, a>0$,称为方程(1)的一个解,如果满足:

(M1) $x(t_0^+)=x_0; x'(t_0^+)=x_0'; x^{(2)}(t_0^+)=x_0^{(2)}$.

(M2) 当 $t\neq t_k$,且 $t\in(t_0,t_0+a)$ 时,$x(t)$ 满足 $x^{(3)}(t)+p(t)x(t)=0$; $x(t),x'(t),x^{(2)}(t)$ 在 $t\neq t_k$ 处连续,$t\in(t_0,t_0+a]$.

(M3) $x(t_k^+)=a_kx(t_k); x'(t_k^+)=b_kx'(t_k)$; $x^{(2)}(t_k^+)=c_kx^{(2)}(t_k)$; $x(t),x'(t),x^{(2)}(t)$ 在 $=t_k$ 处左连续.

收稿日期:2008-10-14
作者简介:黄 辉(1976-),硕士研究生,主要从事微分与差分方程在工程中的应用研究。
*广西自然科学基金项目(0575092)资助。

定义 2　方程(1)的一个解称为振动的，如果它具有任意大的零点；否则，称为非振动的. 如果一个方程的所有解都是振动的，则称方程是振动的.

定义 3　方程(1)的一个解称为有界解，如果存在正常数 N，使得 $t \geqslant t_0$ 时，有 $|x(t)| \leqslant N$.

引理 1[4]　函数 $x(t)$ 为方程(1)的一个解，且存在 $T \geqslant t_0$，使得 $t \geqslant T$，$x(t) > 0(< 0)$ 时，有

(H1) $(t_1 - t_0) + \frac{c_1}{b_1}(t_2 - t_1) + \cdots + \frac{c_1 \cdots c_n}{b_1 \cdots b_n}(t_{n+1} - t_n) + \cdots = +\infty$;

(H2) $(t_1 - t_0) + \frac{b_1}{a_1}(t_2 - t_1) + \cdots + \frac{b_1 \cdots b_n}{a_1 \cdots a_n}(t_{n+1} - t_n) + \cdots = +\infty$;

(H3) $p(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上连续非负且在 $(t_k, t_{k+1}]$ $(k \in N)$ 上不最终恒为零. 则对充分大的 t，有且只有下列情形之一成立.

(A) $x^{(2)}(t) > 0(< 0)$，$x'(t) > 0(< 0)$；(B) $x^{(2)}(t) > 0(< 0)$，$x'(t) < 0(> 0)$.

引理 2　$x(t)$ 为分段连续函数，$x(t)$ 在 $t \neq t_k$ $(t \in R^+)$ 处连续，在 $t = t_k$ 处左连续，设存在 T，当 $t \geqslant T$ 时，有 $x(t) \geqslant 0(\leqslant 0)$，且存在充分大的 $T^* \geqslant T$，使得当 $t \geqslant T^*$ 时，$x(t)$ 在 $(t_k, t_{k+1}]$ $(t_k \geqslant T^*)$ 上单调不增(单调不减)，且 $\sum_{n=1}^{+\infty}[x(t_n^+) - x(t_n)]$ 收敛，则 $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \alpha \geqslant 0(\leqslant 0)$ 存在且有限.

引理 2 的证明过程与文献[6]中的引理 2 类似.

2　主要结果

定理 1　假设引理 1 的条件(H1)～(H3)成立，若还有数列 $\{\prod_{i=1}^{n} a_i\}$ 有正下界，数列 $\{\prod_{i=1}^{n} c_i\}$ 有正上界，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n - 1|$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n - 1|$ 收敛，且存在 $a > 0$，使 $\int_a^{+\infty} p(s)\mathrm{d}s = +\infty$，则方程(1)的任意解或者振动或者最终定号在 $t \to +\infty$ 时趋于零.

证明　设方程(1)有一个非振动有界解 $x(t)$，不妨设 $x(t) > 0$(对于 $x(t) < 0$ 的情形证明方法类似)，其中 $t \geqslant T \geqslant t_0$，由引理 1 知，对充分大的 t，有 (i) $x^{(2)}(t) > 0$，$x'(t) > 0$；(ii) $x^{(2)}(t) > 0$，$x'(t) < 0$ 之一成立. 不妨设存在 $T_0 \geqslant T$，当 $t \geqslant T_0$ 时，有(i)、(ii)之一成立.

(a) 首先证明(i)不成立. 若不然，存在 $t_k \geqslant T_0$，使得 $x'(t_k) > 0$，记 $\gamma = x'(t_k^+) = b_k x'(t_k) > 0$，由 $x^{(2)}(t) > 0$ 知 $x'(t)$ 在 $(t_{k+i-1}, t_{k+i}]$ $(i \in N)$ 上严格递增，对 $t \in (t_k, t_{k+1}]$，$x'(t) > x'(t_k^+) = \gamma > 0$，特别有 $x'(t_{k+1}) > \gamma > 0$. 对 $t \in (t_{k+1}, t_{k+2}]$，$x'(t) > x'(t_{k+1}^+) = b_{k+1}x'(t_{k+1}) > b_{k+1}\gamma > 0$，特别有 $x'(t_{k+2}) > b_{k+1}x'(t_{k+1}) > b_{k+1}\gamma > 0$.

由数学归纳法得到：$x'(t_{k+n}) > b_{k+n-1} \cdots b_{k+1}\gamma > 0$，进而有 $x'(t_{k+n}^+) = b_{k+n}x'(t_{k+n}) > b_{k+n}b_{k+n-1} \cdots b_{k+1}\gamma > 0$，从 t_k 到 t_{k+1} 积分 $x'(t) > \gamma$，得 $x(t_{k+1}) \geqslant x(t_k^+) + \gamma(t_{k+1} - t_k)$，从 t_{k+1} 到 t_{k+2} 积分 $x'(t) > b_{k+1}\gamma$，结合前式得 $x(t_{k+2}) \geqslant x(t_{k+1}^+) + b_{k+1}\gamma(t_{k+2} - t_{k+1}) \geqslant a_{k+1}[x'(t_k^+) + \gamma(t_{k+1} - t_k) + \gamma \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}(t_{k+2} - t_{k+1})]$.

再由归纳法，对 $n \geqslant 2$ 有

$$x(t_{k+n}) \geqslant a_{k+n-1} \cdots a_{k+1}[x'(t_k^+) + \gamma(t_{k+1} - t_k) + \gamma \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}(t_{k+2} - t_{k+1}) + \cdots + \gamma \frac{b_{k+n-1} \cdots b_{k+1}}{a_{k+n-1} \cdots a_{k+1}}(t_{k+n} - t_{k+n-1})].$$

在上式中令 $n \to \infty$，由引理 1 的(H2)及数列 $\{\prod_{i=1}^{n} a_i\}$ 有正下界，知右端趋于 $+\infty$，这与 $x(t)$ 有界矛盾. 从而对 $t \geqslant T_0 \geqslant T$，有 $x'(t) < 0$，即情形(ii)成立.

(b) 由(a)的证明知 $x^{(2)} > 0$，$x'(t) < 0$，由 $x'(t) < 0$ 知 $x(t)$ 在 $(t_k, t_{k+1}]$ $(t_k \geqslant T_0)$ 上严格递增且非负，由 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n - 1|$ 收敛，$x(t)$ 有界，得到 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n - 1||x(t_n)$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}|x(t_n^+) - x(t_n)|$ 收敛，再结合定义知引理 2 满足，从而由引理 2 知 $\lim_{t \to +\infty} x(t) = l$，且 $0 \leqslant l < +\infty$.

下证 $l = 0$. 否则有 $l > 0$，从而存在 $T_1 \geqslant T_0$，使得 $t \geqslant T_1$ 时，有 $x(t) > \frac{l}{2}$，由方程(1)得 $x^{(3)}(t) = -p(t)x(t) < -\frac{l}{2}p(t)$，从 t_j 到 t 积分上式得

$$x^{(2)}(t) - x^{(2)}(t_j^+) < \sum_{t_j < t_i < t}[x^{(2)}(t_i^+) - x^{(2)}(t_i)] - \frac{l}{2}\int_{t_j}^{t} p(t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

这里 $t_j > T_1$. 要证明序列 $\{x^{(2)}(t_i)\}$ 有界. 因为 $t \in (t_k, t_{k+1}]$，$k = i, i+1, \cdots$，$x^{(3)}(t) \leqslant 0$，故 $x^{(2)}(t)$ 单调不增，且 $x^{(2)}(t) > 0$，$x^{(2)}(t_{k+1}) \leqslant x^{(2)}(t_k^+)$，$x^{(2)}(t_{k+2}) \leqslant x^{(2)}(t_{k+1}^+) = c_{k+1}x^{(2)}(t_{k+1}) \leqslant c_{k+1}x^{(2)}(t_k^+)$，利用数学归纳法可得 $x^{(2)}(t_{k+n}) \leqslant c_{k+n-1} \cdots c_{k+1}x^{(2)}(t_k^+)$. 而数列 $\{\prod_{i=1}^{n} c_i\}$ 有正上界，故序列 $\{x^{(2)}(t_i)\}$ 有界，而级数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n - 1|$ 收敛，故 $\sum_{t_j < t_i < t}|c_i - 1||x^{(2)}(t_i)$ 收敛，即 $\sum_{t_j < t_i < t}|x^{(2)}(t_i^+) - x^{(2)}(t_i)|$ 收敛，那么 $\sum_{t_j < t_i < t}[x^{(2)}(t_i^+) - x^{(2)}(t_i)]$ 收敛. 又存在

$a>0$,使$\int_a^{+\infty}p(s)\mathrm{d}s=+\infty$,在(2)式中令$t\to+\infty$,得到$x^{(2)}(t)\to-\infty$,得出矛盾,故$l=0$. 综合(a),(b)知定理1结论成立.

定理2 假设引理1的条件(H1)~(H3)成立,若还有数列$\{\prod_{i=1}^{n}a_i\}$有正下界,级数$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n-1|$收敛,且

$$\int_{t_1}^{t_2}p(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{c_2}\int_{t_2}^{t_3}p(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{c_2c_3}\int_{t_3}^{t_4}p(s)\mathrm{d}s+\cdots+\frac{1}{c_2c_3\cdots c_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}}p(s)\mathrm{d}s+\cdots=+\infty, \tag{3}$$

则方程(1)的任意解或者振动或者最终定号在$t\to+\infty$时趋于零.

定理2的证明类似定理1.

3 实例

例1 考虑三阶脉冲微分方程:

$$\begin{cases} x^{(3)}(t)+\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}x(t)=0, \\ \quad t\geqslant t_0=1,t\neq 3^n,n=1,2,\cdots \\ x((3^n)^+)=(1+\frac{1}{3^n})x(3^n);x'((3^n)^+)= \\ \quad(1-\frac{1}{3^n})x'(3^n), \\ x^{(2)}((3^n)^+)=(1-\frac{1}{3^n})x^{(2)}(3^n), \\ x(1^+)=x_0;x'(1^+)=x_0';x^{(2)}(1^+)=x_0''. \end{cases} \tag{4}$$

取$t_n=3^n,a_n=1+\frac{1}{3^n},b_n=c_n=1-\frac{1}{3^n}(n\in N),p(t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$,可以验证引理1的条件(H1)~(H3)满足,$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n-1|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$收敛,$\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n-1|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$收敛,$\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{3^i})>1$,对于$a>0$,有$\int_a^{+\infty}p(s)\mathrm{d}s=\int_a^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s=+\infty$,从而定理1的条件满足,由定理1知道此脉冲微分方程(4)的任意有界解或者振动或者定号趋于零. 同理,可以验证,此脉冲微分方程(4)的条件满足定理2,所以由定理2也知道此脉冲微分方程的任意有界解或者振动或者定号趋于零.

注 文献[1]的定理1不能判别此脉冲微分方程的任意有界解或者振动或者定号趋于零的,因为还需要条件:$a_n\leqslant 1,n=1,2,\cdots$.

例2 考虑三阶脉冲微分方程:

$$\begin{cases} x^{(3)}(t)+\frac{1}{5t}x(t)=0,t\geqslant t_0=3, \\ \quad t\neq n+3,n=2,3,\cdots \\ x((n+3)^+)=(1-\frac{1}{n^2})x(n+3);x'((n+ \\ \quad 3)^+)=(1-\frac{1}{n})x'(n+3), \\ x^{(2)}((n+3)^+)=(1-\frac{1}{n})x^{(2)}(n+3), \\ x(3^+)=x_0;x'(3^+)=x_0';x^{(2)}(3^+)=x_0''. \end{cases}$$

取$t_n=n+3,a_n=1-\frac{1}{n^2},b_n=c_n=1-\frac{1}{n}(n=2,3,4,\cdots),p(t)=\frac{1}{5t}$,可以验证引理1的条件(H1)~(H3)满足,$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n-1|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,$\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2})=\prod_{i=2}^{n}\frac{i+1}{i}\cdot\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i}=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2}$. 又$\int_{t_1}^{t_2}p(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{c_2}\int_{t_2}^{t_3}p(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{c_2c_3}\int_{t_3}^{t_4}p(s)\mathrm{d}s+\cdots+\frac{1}{c_2c_3\cdots c_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}}p(s)\mathrm{d}s+\cdots\geqslant\int_{t_2}^{t_3}p(s)\mathrm{d}s+\int_{t_3}^{t_4}p(s)\mathrm{d}s+\cdots+\int_{t_n}^{t_{n+1}}p(s)\mathrm{d}s+\cdots=\int_{t_2}^{+\infty}p(s)\mathrm{d}s=\int_{t_2}^{+\infty}\frac{1}{5s}\mathrm{d}s=+\infty$,从而由定理2知道此脉冲微分方程的任意解或者振动或者定号趋于零.

注 文献[1]的定理2不能判别此脉冲微分方程的任意有界解或者振动或者定号趋于零,因为还需要条件:$\sum_{i=1}^{+\infty}|c_i-1|$收敛.

从例1和例2可以看出,新的判别准则改进了文献[1]的结果.

参考文献:

[1] 许文杰. 三阶脉冲微分方程的振动性[J]. 华南师范大学学报:自然科学版,2001(2):59-64.

[2] Wen L Z,Hen Y S. Razumikhin type theorems for functional differen-tial equations with impulses [J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulses Systems,1999,6:389-400.

[3] Weng P X,Yan Z Q. Global existence and stability of functional differential equations with impulses[J]. Ann of Diff Eqs,1998,14(2):330-338.

[4] 毛卫华. 脉冲泛函微分方程的振动性与渐近性[D]. 广州:华南师范大学,2002.

[5] Feng Weizhen. Oscillations of fourth order ODE with impulses[J]. Ann of Diff Eqs,2003,19(2):136-145.

[6] 申建华,庚建设. 具有脉冲扰动的非线性时滞微分方程[J]. 应用数学,1996,9(3):272-277.

(责任编辑:尹 闯)