一类亚纯函数的广义积分及其 Cauchy 主值*

On the Generalized Integrals of Meromorphic Functions and Their Cauchy Principal Value

张 毅
ZHANG Yi

(柳州城市职业学院,广西柳州 545001)
(Liuzhou City Vocational College,Liuzhou,Guangxi,545001,China)

摘要:运用留数定理求解形如 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx$ 的一类亚纯函数的广义积分及其 Cauchy 主值的和,得到 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx$ (Cauchy 主值)与留数间的关系.

关键词:亚纯函数 广义积分 Cauchy 主值 留数定理
中图法分类号:O174.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)03-0154-03

Abstract:This article's prime task is solves the shape like type $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx$ on the generalized integrals of meromorphic functions and their Cauchy principal value summation problem. By using the theorem of residues, in the path, the theorem of relational expression between $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx$ (or the Cauchy principal value) and the residues are gained.

Key words: meromorphic function, generalized integrals, Cauchy principal value, theorem of residues

对于反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx$,要想通过求被积函数的原函数来求解有时候比较困难.本文在不求出被积函数原函数的情况下,利用复变函数中计算围线积分的方法计算反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx$,把积分问题转化为求解适当选取的亚纯函数在奇点处的留数之和,得到 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx$ (Cauchy 主值)与留数间的关系.

定理 1 设 $f(z)$ 为有理函数,且分子的次数小于分母的次数,若 $f(z)$ 在实轴上除了有非零的一级极点外解析.令 $F(x)=e^{ax}f(e^x)$,其中 $0<a<1$ 为常数,则

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(e^x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{a\pi i}}\sum \operatorname*{Res}_{z=a_j,0<\operatorname{Im}a_j<2\pi}[e^{az}f(e^z)] + \frac{\pi i}{1-e^{2a\pi i}}\sum\left[\operatorname*{Res}_{z=x_t,\operatorname{Im}x_t=0}[e^{az}f(e^z)] + \operatorname*{Res}_{z=x_t+2\pi i,\operatorname{Im}x_j=2\pi}[e^{az}f(e^z)]\right].$$

证明 设 $f(e^z)$ 在带形区域 $0<\operatorname{Im}z<2\pi$ 内的奇点为 $a_1,\cdots,a_k$,在实轴上的奇点为 $x_1,\cdots,x_n$,则 $x_1+2\pi i,\cdots,x_n+2\pi i$ 也为 $f(e^z)$ 的奇点.

设 C_t 表示以 x_t 为圆心,r 为半径的上半圆周.C_t' 表示以 $x_t+2\pi i$ 为圆心,r 为半径的下半圆周,L_t 表示以 $x_{t-1}+2\pi i+r$ 和 $x_t+2\pi i-r$ 为端点的线段,$2\leqslant t\leqslant n$,L_1 表示以 $-R+2\pi i$ 和 $x_1+2\pi i-r$ 为端点的线段,L_{n+1} 表示以 $x_n+2\pi i+r$ 和 $R+2\pi i$ 为端点的线段.C 由 $l_1,L_n,C_n',\cdots,C_1',L_1,l_2,[-R,x_1-r]C_1,\cdots,C_n,[x_n+r,R]$ 组成,其方向如图1所示.当 R 足够大且 r 足够小时,可以使所有的 $a_1,\cdots,a_k$ 落在 C 内.

收稿日期:2009-05-13
作者简介:张 毅(1959-),男,副教授,主要从事复分析研究工作。
*广西自然科学基金项目(桂科自 0728041)资助。

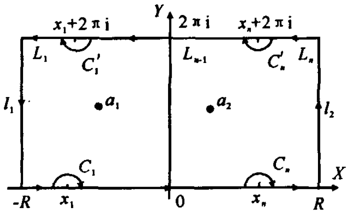

图 1 辅助围线

由留数定理[1]知

$$\int_C F(z)\mathrm{d}z = \int_{l_1} F(z)\mathrm{d}z + \int_{L_n} F(z)\mathrm{d}z + \int_{C'_n} F(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C'_1} F(z)\mathrm{d}z + \int_{L_1} F(z)\mathrm{d}z + \int_{l_2} F(z)\mathrm{d}z + \int_{-R}^{x_1-r} F(z)\mathrm{d}z + \int_{C_1} F(z)\mathrm{d}z + \int_{x_1+r}^{x_2-r} F(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} F(z)\mathrm{d}z + \int_{x_1+r}^{R} F(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_j} F(z). \tag{1}$$

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{l_1} F(z)\mathrm{d}z = 0$.

在 l_1 上有 $z = R + \mathrm{i}y, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$,则

$$\left|\int_{l_1} F(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{l_1} \mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}y)} f(\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y})\mathrm{d}(R+\mathrm{i}y)\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}y)} f(\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y})\mathrm{i}\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{aR)} |f(\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y})|\mathrm{d}y. \tag{2}$$

因为 $f(z)$ 为有理函数,且分子的次数小于分母的次数,所以

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = A,$$

其中 A 为有限复常数.因此存在 $M > 0$,当 $|z| \geqslant R > M$ 时有

$$|f(z)| \leqslant \frac{|2A|}{|z|}.$$

结合(2)式可以得

$$\left|\int_{l_1} F(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{aR} |f(\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y})|\mathrm{d}y \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{aR} \cdot \frac{|2A|}{\mathrm{e}^R}\mathrm{d}y = \frac{|2A|}{\mathrm{e}^{R(1-a)}} 2\pi,$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{l_1} F(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

(Ⅱ)证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{l_2} F(z)\mathrm{d}z = 0$.

在 l_2 上有 $z = -R + \mathrm{i}y$,其中 $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$,则

$$\left|\int_{l_2} F(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{l_2} \mathrm{e}^{a(-R+\mathrm{i}y)} f(\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y})\mathrm{d}(-R+\mathrm{i}y)\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{a(-R+\mathrm{i}y)} f(\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y})\mathrm{i}\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-aR} |f(\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y})|\mathrm{d}y. \tag{4}$$

因为

$$\lim_{R\to+\infty} \mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y} = 0,$$

而 $f(z)$ 为有理函数,所以

$$\lim_{R\to\infty} f(\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y}) = f(0).$$

结合(4)式可以得

$$\left|\int_{l_2} F(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-aR} |f(\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y})|\mathrm{d}y \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-aR} |2f(0)|\mathrm{d}y = 4\pi|f(0)|\mathrm{e}^{-aR},$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{l_2} F(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{5}$$

(Ⅲ)证明 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_t} F(z)\mathrm{d}z = -\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=x_t} F(z)$.

因为 x_t 是 $f(z)$ 的一级极点,所以也是 $f(\mathrm{e}^z)$ 的一级极点,从而是 $F(z)$ 的一级极点.所以存在 x_t 的去心邻域 $U^0(x_t,\varepsilon)$,在该去心邻域内 $F(z)$ 有形式:

$$F(z) = \frac{c_{-1}}{z-x} + c_1(z-x) + \cdots + c_n(z-x)^n + \cdots = \frac{c_{-1}}{z-x} + F_1(z),$$

其中 $F_1(z)$ 在 $U(x_t,\varepsilon)$ 内解析,$c_{-1} \neq 0$.所以当取 $r < \varepsilon$ 时有

$$\int_{C_t} F(z)\mathrm{d}z = \int_{C_t} \frac{c_{-1}}{z-x_t}\mathrm{d}z + \int_{C_t} F_1(z)\mathrm{d}z. \tag{6}$$

结合 C_t 的参数方程:$z - x_t = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,得到

$$\int_{C_t} \frac{c_{-1}}{z-x_t}\mathrm{d}z = -\pi c_{-1}\mathrm{i}. \tag{7}$$

又因为 $F_1(z)$ 在 $U(x_t,\varepsilon)$ 内解析,所以再假设 $|F_1(z)| \leqslant A$,其中 A 为正常数,所以

$$\left|\int_{C_t} F_1(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{C_t} |F(z)|\mathrm{d}s \leqslant \int_{C_t} A\mathrm{d}s = A\pi r,$$

因此

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_t} F_1(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{8}$$

结合(6)式、(7)式和(8)式有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_t} F(z)\mathrm{d}z = -\pi \mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=x_t} F(z). \tag{9}$$

(Ⅳ)证明 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C'_t} F(z)\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}\limits_{z=x_t+2\pi\mathrm{i}} F(z)$.

由于 $x_t + 2\pi\mathrm{i}$ 是 $F(z)$ 的一级极点,所以存在 $x_t + 2\pi\mathrm{i}$ 的去心邻域 $U^0(x_t + 2\pi\mathrm{i},\varepsilon)$,在该邻域内 $F(z)$ 有形式:

$$F(z) = \frac{c'_{-1}}{z - x_t - 2\pi\mathrm{i}} + c'_1(z - x_t - 2\pi\mathrm{i}) + \cdots + c'_n(z - x_t - 2\pi\mathrm{i})^n + \cdots = \frac{c'_{-1}}{z - x_t - 2\pi\mathrm{i}} + F_1(z),$$

其中 $F_1(z)$ 在 $U(x_t + 2\pi\mathrm{i},\varepsilon)$ 内解析,$c'_{-1} \neq 0$.所以当

取 $r < \varepsilon$ 时有

$$\int_{C_t'} F(z)\mathrm{d}z = \int_{C_t'} \frac{c_{-1}^t}{z - x_t - 2\pi\mathrm{i}}\mathrm{d}z + \int_{C_t'} F_1(z)\mathrm{d}z. \tag{10}$$

结合 C_t' 的参数方程：$z - x_t - 2\pi\mathrm{i} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，得到

$$\int_{C_t'} \frac{c_{-1}^t}{z - x_t}\mathrm{d}z = -\pi c_{-1}^t \mathrm{i}. \tag{11}$$

又因为 $F_1(z)$ 在 $U(x_t + 2\pi\mathrm{i}, \varepsilon)$ 内解析，所以再假设 $|F_1(z)| \leqslant B$，其中 B 为一正常数，那么

$$\left|\int_{C_t'} F_1(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{C_t'} |F_1(z)|\mathrm{d}s \leqslant \int_{C_t'} B\mathrm{d}s = B\pi r,$$

因此

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_t'} F_1(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{12}$$

结合(10)式、(11)式和(12)式有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_t'} F(z)\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}c_{-1}^t = -\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=x_t+2\pi\mathrm{i}} F(z). \tag{13}$$

(Ⅴ) 考虑 $\int_L F(z)\mathrm{d}z$ 与 $\int_{-R}^{R} F(x)\mathrm{d}x$ 的关系，其中 L 表示以 $R + 2\pi\mathrm{i}$ 为起点，$-R + 2\pi\mathrm{i}$ 为终点的有向线段.

在 L 上有 $z = x + 2\pi\mathrm{i}$，$-R \leqslant x \leqslant R$，则 $F(z) = F(x + 2\pi\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{a(x+2\pi\mathrm{i})}f(\mathrm{e}^{x+2\pi\mathrm{i}}) = \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{ax}f(\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}F(x)$，

所以

$$\int_L F(z)\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}\int_R^{-R} F(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-R}^{R} F(x)\mathrm{d}x. \tag{14}$$

结合(1)式、(3)式、(5)式、(9)式、(13)式和(14)式得

$$\mathrm{V.P.}\,(1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}})\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=a_j}F(z) + \pi\mathrm{i}\sum_{t=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=x_t}F(z) + \pi\mathrm{i}\sum_{t=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=x_t+2\pi\mathrm{i}}F(z),$$

从而有

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}}\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=a_j}F(z) + \frac{\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}}\sum_{t=1}^{n}\left[\operatorname*{Res}_{z=x_t}F(z) + \operatorname*{Res}_{z=x_t+2\pi\mathrm{i}}F(z)\right],$$

所以

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}f(\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}}\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=a_j}[\mathrm{e}^{az}f(\mathrm{e}^{z})] + \frac{\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}}\sum_{t=1}^{n}\left[\operatorname*{Res}_{z=x_t}[\mathrm{e}^{az}f(\mathrm{e}^{z})] + \operatorname*{Res}_{z=x_t+2\pi\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{az}f(\mathrm{e}^{z})]\right],$$

那么

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}f(\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}}\sum\operatorname*{Res}_{z=a_j,0<\mathrm{Im}a_j<2\pi}[\mathrm{e}^{az}f(\mathrm{e}^{z})] + \frac{\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}}\sum\left[\operatorname*{Res}_{z=x_t,\mathrm{Im}x_t=0}[\mathrm{e}^{az}f(\mathrm{e}^{z})] + \operatorname*{Res}_{z=x_t+2\pi\mathrm{i},\mathrm{Im}x_t=2\pi}[\mathrm{e}^{az}f(\mathrm{e}^{z})]\right].$$

推论1　设 $f(z)$ 为有理函数，且分子的次数小于分母的次数，若 $f(z)$ 在实轴上没有奇点. 令 $F(x) = \mathrm{e}^{ax}f(\mathrm{e}^{x})$，其中 $0 < a < 1$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}f(\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}}\sum\operatorname*{Res}_{z=a_j,0<\mathrm{Im}a_j<2\pi}[\mathrm{e}^{az}f(\mathrm{e}^{z})].$$

例　计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解　设 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$，$F(z) = \frac{\mathrm{e}^{z/2}}{1 + \mathrm{e}^{2z}}$，则有 $F(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}z}f(\mathrm{e}^{z})$. 显然 $f(z)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面上仅有1个一阶极点：$z = \mathrm{i}$，并且 $f(z)$ 分子的次数小于分母的次数，$0 < a = \frac{1}{2} < 1$，满足定理1的条件.

又因为 $F(z)$ 在实轴上没有奇点，在带形区域 $0 < \mathrm{Im}z < 2\pi$ 内有2个一阶极点：$z_1 = \frac{3\pi\mathrm{i}}{2}$ 和 $z_2 = \frac{\pi\mathrm{i}}{2}$. 而 $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}F(z) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，$\operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}F(z) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，由定理1可得

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

又因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$ 收敛，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

参考文献：

[1] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第3版. 北京：高等教育出版社，2004.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[3] 张家骥，邱淑芳. 浅析留数在积分中的应用[J]. 科技信息，2007(36)：175-176.

（责任编辑：尹　闯）