关于3个拟单项式序列*
Three Quasi-monomiality Sequences

陈建威
CHEN Jian-wei

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)
(College of Mathematical Sciences, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:应用演算方法给出广义 Laguerre 多项式、Hermite-kampé de Féet 多项式和广义 Legendre 多项式的乘法算子和微分算子的表达形式.

关键词:拟单项式 演算方法 单项式原理 生成函数
中图法分类号:O29 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2009)03-0157-02

Abstract: The forms of multiplicity operators and differential operators of the generalized Laguerre polynomials, Hermite-kampe de Feet polynomials and Legendre polynomials were presented through operational calculus.

Key words: quasi-monomiality, operational method, monomiality principle, generating function

近年来,G. Dattoli, A. Torre 等人[1~4]把演算方法应用到多项式上,根据 monomiality 原理,得到了一些在数学和物理上都很有价值的结果,并在此基础上解决了大量微分方程和特殊函数方面的问题.

多项式 $p_n(x)(n\in N, x\in C)$ 称为拟单项式,如果存在两个算子 M 和 P,分别满足以下两个方程:$Mp_n(x)=p_{n+1}(x)$, $Pp_n(x)=np_{n-1}(x)$. 此时,M 和 P 分别称为关于 $p_n(x)$ 的乘法算子和微分算子.

由 M 和 P 的定义容易知道:

$$MPp_n(x)=np_n(x), \tag{1}$$

$p_n(x)=M^np_0(x)$. 若 $p_0(x)=1$,则 $p_n(x)=M^n$. Youssef Ben Cheikh[5]证明:对于任给的多项式序列,一定存在着这样的两个算子,并且对于某几类多项式序列,给出了它们的具体形式. 本文针对3个比较典型的多项式序列,分别给出它们相应的乘法算子和微分算子的具体形式,以及由此引出的一些新结论.

1 广义 Laguerre 多项式 $L_n(x,y)$

对于广义 Laguerre 多项式:$L_n(x,y)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k y^{n-k}x^k}{(n-k)!(k!)^2}$,相应的乘法算子和微分算子的形式分别为 $M=y-D_x^{-1}$ 和 $P=-\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x}$,其中 D_x^{-1} 的定义为 $D_x^{-n}p_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}p_n(t)\mathrm{d}t$.

由 $L_n(x,y)$ 的表达式可知 $\frac{\partial}{\partial y}L_n(x,y)=nL_{n-1}(x,y)$,故 $\frac{\partial}{\partial y}L_n(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x}L_n(x,y)$. 又因为 $L_n(x,0)=(-1)^n\frac{x^n}{n!}$,故 $L_n(x,y)=\exp[-y(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x})]\frac{(-1)^nx^n}{n!}$. 根据(1)式可得 $L_n(x,y)$ 满足二阶微分方程:$[yx\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(x-y)\frac{\partial}{\partial x}+n]L_n(x,y)=0$. 若设 $\Phi_n(x,z;y)=e^{z\frac{\partial^2}{\partial x^2}}L_n(x^2,y)$,则有递推公式:$[\frac{\partial}{\partial x}+(x+2z\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\Phi_n(x,z;y)=-4(x+2z\frac{\partial}{\partial x})\Phi_{n-1}(x,z;y)$.

一般 Laguerre 多项式 $L_n(x)$ 和连带 Laguerre 多项式 $L_n^{(m)}(x)$ 的定义分别为 $L_n(x)=(n!)^2\sum_{k=0}^{n}$

收稿日期:2009-05-05
作者简介:陈建威(1984-),男,硕士研究生,主要从事特殊函数方面的研究。
*广西研究生教育创新计划项目(No. 2008106020701M236)资助。

$\frac{x^k}{(k!)^2(n-k)!}$，$L_n^{(m)}(x)=(n!)^2\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{m+k}\cdot\frac{x^k}{k!(m+k)!(n-m-k)!}$. 因此不难得到关系式：$L_n(x)=(1-D_x^{-1})^n=(\frac{d}{dx}-1)^n\frac{x^n}{n!}$，$L_n(x,y)=y^nL_n(\frac{x}{y})$，$L_n^{(m)}(x)=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}L_{n+m}(x)=(1-\frac{d}{dx})^{m+n}\frac{(-1)^nx^n}{n!}$. 在此基础上，有下列几个关于和的生成函数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^nL_n(x)=\frac{1}{1-t}\frac{1}{1+\frac{tD_x^{-1}}{1-t}}=\frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{t}{1-t})^nD_x^{-n}=\frac{1}{1-t}\exp(-\frac{xt}{1-t}),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x)=\exp[t(1-D_x^{-1})]=\exp(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^nt^n}{(n!)^2}=\exp(t)C_0(xt),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}L_n^{(m)}(x)=e^t\exp[-t\frac{d}{dx}]L_n(x)=e^tL_n(x-t),$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}\frac{t^n}{n!}L_n^{(m)}(x)=e^{u(1-\frac{d}{dx})}e^{t(1-D_x^{-1})}=e^{u+t}C_0((x-u)t),$$

其中 $C_n(x)$ 是第 n 阶 Tricomi 函数：$C_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{k!(n+k)!}$. 它的一个生成函数是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nC_n(x)=\exp(t-\frac{x}{t})$.

2　Hermite-Kampé de Féet 多项式 $H_n(x,y)$

Hermite-Kampé de Féet 多项式 $H_n(x,y)$ 的一个生成函数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x,y)=\exp(xt+yt^2)$，具体表达式为 $H_n(x,y)=n!\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^ky^kx^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$，相应的 M 和 P 分别为 $M=x+2y\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $P=\frac{\partial}{\partial x}$.

根据(1)式有 $(2y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x})H_n(x,y)=nH_n(x,y)$. 因为 $H_n(x,y)$ 是热传导偏微分方程：$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y)$，$F(x,0)=x^n$ 的解，故

$$H_n(x,y)=\exp(y\frac{\partial^2}{\partial x^2})(x^n),\qquad(2)$$

如果把(2)式中的指数算子理解为一个 Guass 变换，那么有

$$H_n(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-t)^2}{4y}}t^n\mathrm{d}t.\qquad(3)$$

考虑 $H_n(x,y)H_n(z,w)$ 的生成函数. 由(2)式有 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x,y)H_n(z,w)=\exp(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+w\frac{\partial^2}{\partial z^2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xzt)^n}{n!}=\exp(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+w\frac{\partial^2}{\partial z^2})e^{xzt}$，又由(3)式，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x,y)H_n(z,w)=\frac{1}{\sqrt{1-4yt^2w}}\exp(\frac{xzt+t^2(wx^2+yz^2)}{1-4t^2yw}).\qquad(4)$$

同理可证

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x,y)L_n(z,w)=\exp(y(wt)^2+xwt)_HC_0(2zt(\frac{x}{2}+ywt),y(zt)^2),\qquad(5)$$

其中 ${}_HC_n(x,y)$ 是第 n 阶 Hermite-Tricomi 函数：${}_HC_n(x,y)=e^{y\frac{\partial^2}{\partial x^2}}C_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kH_k(x,y)}{k!(n+k)!}$.

一般 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 的表达式为 $H_n(x)=(n!)\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)\frac{(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$. 它与 $H_n(x,y)$ 之间存在着关系：$H_n(2x,-1)=H_n(x)$. 在(4)式中令 $x=2x,y=w=-1,z=2y$，可得 $H_n(x)$ 的一个熟知的双线性生成函数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)H_n(y)=\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}\exp(y^2-\frac{(y-2xt)^2}{1-4t^2})$. 在(5)式中令 $x=2x,y=-1,z=y,w=1$，可得 $H_n(x)$ 和 $L_n(x)$ 的一个双边生成函数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)L_n(y)=\exp(-t^2+2xt)_HC_0(2xyt-2yt^2,-y^2t^2)$.

3　广义 Legendre 多项式 $R_n(x,y)$

G. Dattoli 定义了如下的一类多项式：$R_n(x,y)=(n!)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-k}y^kx^{n-k}}{(k!)^2((n-k)!)^2}$，相应的乘法算子为 $M=D_y^{-1}-D_x^{-1}$，它有两个相应的微分算子 P_x 和 P_y，分别为 $P_x=-\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x}$，$P_y=\frac{\partial}{\partial y}y\frac{\partial}{\partial y}$. 易知 $R_n(x,y)$ 的一个生成函数是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n!)^2}R_n(x,y)=C_0(-yt)C_0(xt)$.

$R_n(x,y)$ 是一种广义的 Legendre 多项式 $P_n(x)$，

（下转第 167 页）

[6] Cheng M B,Wang G Q. A note on the inventory model for deteriorating items with trapezoidal type demand rate[J]. Computers & Industrial Engineering,2009,56(4):1296-1300.
[7] Padmanabhan G,Vart P. EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate[J]. European Journal of Operational Research,1995,86(2):281-292.
[8] Ouyang L Y,Heish T P,Dye C Y. An inventory model for deteriorating items with stock dependent demand under the conditions of inflation and time value of money[J]. Engineering Economist,2003,48(1):52-68.
[9] Dye C Y,Chang H J,Teng J T. A deteriorating inventory model with time-varying demand and shortage-dependent partial backlogging [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 172 (2): 417-429.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 158 页)

因为

$$P_n(x) = R_n(\frac{1-x}{2},\frac{1+x}{2}) =$$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}.$$

根据前面所用的方法，不难得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n!)^2}H_n(x,y)R_n(z,w) = \exp(y\frac{\partial^2}{\partial x^2})C_0(-wxt)C_0(zxt)$. 令 $x=2x, y=-1, z=\frac{1-y}{2}, w=\frac{1+y}{2}$，可得以下关于 $H_n(x)$ 和 $P_n(x)$ 的一个双边生成函数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n!)^2}H_n(x)P_n(y) = \exp(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2})C_0(-(1+y)xt)C_0((1-y)xt)$.

参考文献:

[1] Dattoli G,Lorenzutta S,Mancho A M Torre A, Generalized polynomials and associated operational identities [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,1999,108:209-218.
[2] Dattoli G. Bilateral generating functions and operational methods[J]. J Math Anal Appl,2002,269:716-725.
[3] Dattoli G,Torre A. Exponential operators,quasi-monomials and generalized polynomials [J]. Radiation Physics and Chemistry,2000,57:21-26.
[4] Dattoli G,Torre A,Mancho A M. The generalized Laguerre polynomials, the associated Bessel functions and application to propagation problems [J]. Radiation Physics and Chemistry,2000,59:229-237.
[5] Youssef Ben Cheikh. Some results on quasimonomiality [J]. Applied Mathematics and Computation,2003,141:63-76.

(责任编辑:尹　闯)