

# 用旋转矢量描述波形及振动曲线与波形的转换\*

## Describe the Wave Form and the Transformation between the Harmonic Vibration Curve and the Wave Form with Rotating Vectors

杨庆怡, 刘奕新, 郭进

YANG Qing-yi, LIU Yi-xin, GUO Jin

(广西大学物理科学与工程技术学院, 广西南宁 530004)

(College of Physics Science and Technology, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要:** 类比于简谐振动的旋转矢量描述法, 提出用波动旋转矢量描述波形以及利用振动旋转矢量和波动旋转矢量来实现振动曲线与波形之间相互转换的方法。

**关键词:** 振动曲线 波形 旋转矢量 转换

**中图分类号:** O321 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2010)02-0107-03

**Abstract:** By comparing with harmonic vibration described using the rotation vector  $A_r$ , the wave rotating vector  $A_w$  was introduced to describe wave form. A method to realize the transformation between the harmonic vibration curve and the wave form with rotation vector  $A_r$  was proposed.

**Key words:** harmonic vibration curve, wave form, rotating vectors, transformation

振动与波是大学物理课程中的基本内容, 振动是单一质元在线性回复力的作用下在其平衡位置附近作往复运动的过程; 波动则是弹性媒质在弹性力的作用下, 由于波源的振动而引起媒质质元从波源开始由里向外依次发生振动的过程. 简谐振动和平面简谐波是振动和波动过程中最为简单的情形. 振动曲线与波形之间的相互转换是学习振动与波内容时经常遇到的问题, 在由  $x_0$  处质元的振动曲线求时刻的  $t_0$  波形时, 需要考虑该质元的相位、振动方向以及与相邻质元间的相位关系, 在明确这些因素之后, 即可根据质元的振动曲线作出相应的波形; 在由  $t_0$  的波形求  $x_0$  处质元振动曲线时, 需要根据该时刻的波形确定  $x_0$  处质元的相位、位移以及振动方向, 在明确这些因素之后, 即可作出该质元的振动曲线. 然而, 在大学物理课程的教学过程中, 学生在学习

了相关的知识之后, 并不一定能够熟悉地了解振动过程与波动过程的本质, 对振动过程中质元的相位、相位变化以及振动方向和波动过程中质元的位移、振动方向以及质元间的相位关系理解不透彻, 从而不能顺利地正确地进行转换. 因此, 提出一种较为直观的方法可以使学生在学习振动与波的内容时能够更好地掌握振动曲线与波形的转换. 类比于简谐振动的旋转矢量描述法, 本文提出用波动旋转矢量描述波形以及利用振动旋转矢量和波动旋转矢量来实现振动曲线与波形之间相互转换的方法.

### 1 简谐振动与平面简谐波的特征分析

在线性回复力的作用下质元作往复运动时的位移  $y$  与时刻  $t$  满足

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

的振动称为简谐振动, 其中,  $A$  为振幅,  $(\omega t + \varphi_0)$  为时刻的相位,  $\varphi_0$  为初相位. 利用(1)式可以求出质元作简谐振动时的速度  $v$  和加速度  $a$ ,

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos[(\omega t + \varphi_0) + \pi/2], \quad (2)$$

收稿日期: 2009-06-08

作者简介: 杨庆怡(1963-), 男, 博士, 副教授, 主要从事量子光学及大学物理教学研究。

\* 新世纪广西高等教育教学改革工程“十一五”项目资助。

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \cos[(\omega t + \varphi_0) + \pi]. \quad (3)$$

由(1)式描述的简谐振动可以用旋转矢量(称为振动旋转矢量)来描述.如图1所示,大小保持不变的矢量 $A$ ,以其始端 $O$ 为定点以角速度 $\omega$ 沿逆时针方向转动,在初始时刻 $A$ 与 $y$ 轴的夹角为 $\varphi_0$ ,则在时刻 $t$ 时 $A$ 与 $y$ 轴的夹角为 $(\omega t + \varphi_0)$ ,则 $A$ 的终端 $M$ 在 $y$ 轴上的投影 $P$ 为 $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,从而可以用这样一个旋转矢量来描述质元的简谐振动.利用振动旋转矢量来描述简谐振动的优点是可以方便地作出振动曲线以及直观地了解质元作简谐振动时的相位、位移以及质元的运动方向.根据质元作简谐振动时的速度和加速度,类比于振动旋转矢量描述简谐振动的位移,可以引入速度旋转矢量和加速度旋转矢量来描述简谐振动过程中质元的速度和加速度随时间变化的关系<sup>[1]</sup>.

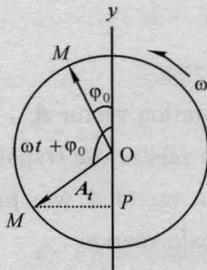


图1 简谐振动的旋转矢量法

波动的实质是介质在弹性力的作用下,由于波源的振动引起介质中一系列的质元从波源开始由里向外先后作简谐振动,描述波源以及所有参与振动的质元振动规律的方程称为波动方程,它反映了波源以及所有参与振动的质元集体作不同步的简谐振动.平面简谐横波的波动方程为

$$y = A \cos[\omega(t \mp x/u) + \varphi_0], \quad (4)$$

其中,“ $\mp$ ”号分别表示波沿 $x$ 轴正向传播和负向传播, $[\omega(t \mp x/u) + \varphi_0]$ 为 $x$ 处的质元在时刻 $t$ 的相位, $\varphi_0$ 为坐标原点处质元的初相位, $u$ 为波的传播速度.当给定 $x = x_0$ 时(4)式描述的是 $x_0$ 处的质元随时间作简谐振动;当给定 $t = t_0$ 时(4)式描述的是波源以及所有参与振动的质元在时刻 $t_0$ 时的位移,即波形;而当 $x$ 和 $t$ 都发生变化时(4)式描述的是所有参与振动的质元的振动规律(即波形随时间的变化),从波形的变化关系来看波形沿波的传播方向移动,因此称为行波.

## 2 用波动旋转矢量描述波形

根据(4)式,对于给定的时刻 $t_0$ 波动方程描述

的是这一时刻的波形

$$y = A \cos[(\mp \omega/u)x + \varphi_0], \quad (5)$$

其中, $\varphi_0 = \omega t_0 + \varphi_0$ 为 $x = 0$ 处的质元在 $t_0$ 时刻的相位.在用振动旋转矢量描述简谐振动时, $A$ 以角速度 $\omega$ 沿逆时针方向转动,在 $A$ 转动过程中,相位 $(\omega t + \varphi_0)$ 随时间而增大.考虑由(5)式描述的波形,当波沿 $x$ 轴正向传播时,质元的相位随坐标 $x$ 而减小,当波沿 $x$ 轴负向传播时,质元的相位随坐标 $x$ 而增大;而相距一个波长的两个质元的相位差为 $2\pi$ .根据波形中质元的相位特征以及类比于用振动旋转矢量描述简谐振动,可以引入另一个旋转矢量(称为波动旋转矢量)来描述波动过程中某一时刻的波形<sup>[2]</sup>.

如图2所示,大小保持不变的矢量 $A_x$ 以其始端 $O$ 为定点以角速度 $\omega$ 转动,在时刻 $t_0$ ,坐标原点处 $A_x$ 与 $y$ 轴的夹角为 $\varphi_0 = \omega t_0 + \varphi_0$ ,则在 $A_x$ 的转动过程中, $A_x$ 与 $y$ 轴的夹角为 $[\mp (\omega/u)x + \varphi_0]$ ,取负号时相位减小,表示 $A_x$ 沿顺时针方向转动,而取正号时相位增大,表示 $A_x$ 沿逆时针方向转动.利用关系 $\Delta\varphi = (\omega/u)\Delta x = \omega\Delta t$ ,当 $A_x$ 旋转一周时, $A_x$ 的终端 $M$ 在 $y$ 轴上的投影随坐标 $x$ 的变化即为(5)式描述的在时刻 $t_0$ 时一个周期内的波形,其中, $A_x$ 沿顺时针方向转动时得到的是沿 $x$ 正向传播的波形,而 $A_x$ 沿逆时针方向转动时得到的是沿 $x$ 负向传播的波形.

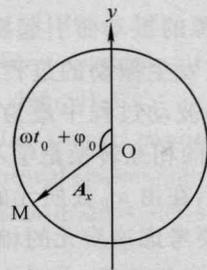


图2 用波动旋转矢量描述波形

## 3 振动曲线与波形相互转换的旋转矢量法

通过对振动方程与波动方程的相位以及相位变化的关系进行分析,我们利用旋转矢量法来实现振动曲线与波形之间的相互转换.在振动方程(1)中,质元作简谐振动的相位 $(\omega t + \varphi_0)$ 随时间而增大,而在波动方程(4)中,对于给定的时刻 $t_0$ , $[\omega(t_0 \mp x/u) + \varphi_0]$ 描述了所有参与振动的质元的相位随坐标 $x$ 变化的关系,当波沿 $x$ 轴正向传播时,相位随 $x$ 的增大而减小,而当波沿 $x$ 轴负向传播时,相位

随  $x$  的增大而增大. 而从振动过程中质元的相位  $(\omega t + \varphi_0)$  与波动过程中质元的相位  $[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  来看, 简谐振动在时刻  $t_0$  的相位刚好就是该时刻的波形中处于坐标原点处的质元的相位. 根据对振动过程和波动过程的相位及变化关系的分析, 结合振动曲线和波形的旋转矢量描述方法, 可以总结出利用旋转矢量法来描述振动曲线与波形间相互转换的一种便捷而可靠的方法.

(1) 根据振动曲线作出  $t_0$  时刻的波形

在振动曲线上确定时刻  $t_0$  质元的振动旋转矢量  $\mathbf{A}_t$ , 它与  $x=0$  处质元的波动旋转矢量  $\mathbf{A}_x$  对应, 如果波沿  $x$  轴正向传播, 则  $\mathbf{A}_x$  沿顺时针旋转一周时其终端在  $y$  轴上的投影即构成该时刻的波形; 如果波沿  $x$  轴负向传播, 则  $\mathbf{A}_x$  沿逆时针旋转一周时其终端在  $y$  轴上的投影即构成该时刻的波形.

(2) 根据波形作出  $x_0$  处质元的振动曲线

在给定的波形中确定  $x_0$  处质元的波动旋转矢量  $\mathbf{A}_x$ , 它与该时刻的振动旋转矢量  $\mathbf{A}_t$  对应, 则  $\mathbf{A}_t$  沿逆时针旋转一周时其终端在  $y$  轴上的投影即构成  $x_0$  处质元的振动曲线.

4 实例分析

下面通过两个例子来说明利用波动旋转矢量描述波形以及利用振动旋转矢量和波动旋转矢量来实现振动曲线与波形之间的相互转换.

**例 1** 平面简谐波以波速  $u$  传播, 波长为  $\lambda$ , 在  $t_0$  时刻坐标原点处质元的位移  $y = A/2$  ( $A$  为振幅) 并且向下运动, 分别作出波沿  $x$  轴正向传播和负向传播的波形.

根据波形的旋转矢量描述法, 在  $t_0$  时刻  $\mathbf{A}_x$  的相位为  $\pi/3$ , 当  $\mathbf{A}_x$  沿顺时针方向转动一周时,  $\mathbf{A}_x$  的终端在  $y$  轴上的投影随坐标  $x$  的变化构成沿  $x$  轴正向传播的波形如图 3 所示; 当  $\mathbf{A}_x$  沿逆时针方向转动一周时,  $\mathbf{A}_x$  的终端在  $y$  轴上的投影随坐标  $x$  的变化构成沿  $x$  轴负向传播的波形如图 4 所示.

**例 2** 一平面简谐波的波长为  $\lambda$ , 周期为  $T$ , 坐标原点处质元的振动曲线如图 5 所示, 当波分别沿  $x$  轴正向和负向传播时, 作出  $t = 0$  时的波形和  $x = \lambda/4$  处质元的振动曲线.

根据振动曲线与波形转换的旋转矢量法, 在图 5 中, 当  $t = 0$  时  $\mathbf{A}_t$  的相位为  $3\pi/2$ , 则  $\mathbf{A}_x$  的相位为  $3\pi/2$ . 当波沿  $x$  轴正向传播时,  $\mathbf{A}_x$  沿顺时针旋转一周即得到相应的波形如图 6(a) 所示. 在图 6(a) 中,  $x = \lambda/4$  处质元对应的  $\mathbf{A}_x$  的相位为  $\pi$ , 则  $\mathbf{A}_t$  的相位为

$\pi$ , 当  $\mathbf{A}_t$  沿逆时针旋转一周时得到相应的振动曲线如图 6(b) 所示; 当波沿  $x$  轴负向传播时,  $\mathbf{A}_x$  沿逆时针旋转一周即得到相应的波形如图 7(a) 所示. 在图 7(a) 中,  $x = \lambda/4$  处质元对应的  $\mathbf{A}_x$  的相位为  $0$ , 则  $\mathbf{A}_t$  的相位为  $0$ , 当  $\mathbf{A}_t$  沿逆时针放旋转一周时得到相应的振动曲线如图 7(b) 所示.

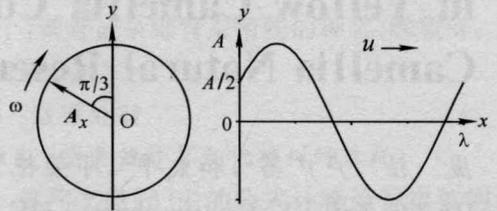


图 3 沿  $x$  轴正向传播的波形

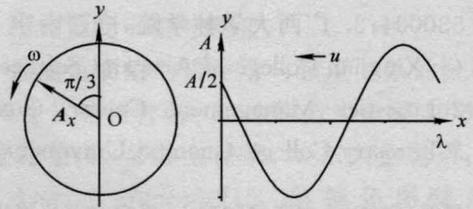


图 4 沿  $x$  轴负向传播的波形

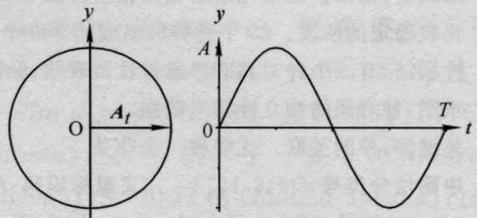


图 5 坐标原点处质元的振动曲线

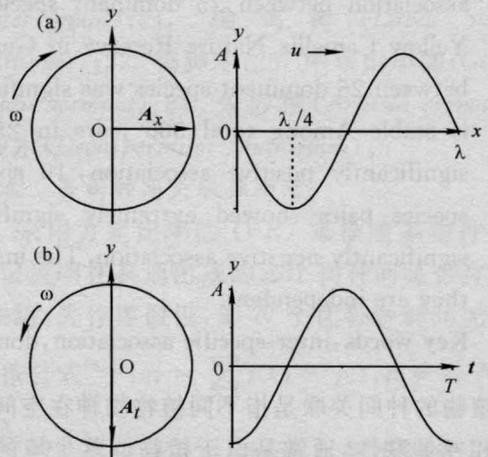


图 6  $t = 0$  时沿  $x$  轴正向传播的波形(a)和  $x = \lambda/4$  处的振动曲线(b)

(下转第 115 页)

术Ⅱ:取样技术[J]. 热带亚热带森林生态系统研究, 1985,3:167-173.

[6] 张金屯. 数量生态学[M]. 北京:科学出版社,2004.

[7] 刘金福,洪伟,樊后保,等. 天然格氏栲林乔木层种群间关联性研究[J]. 林业科学,2001,37(4):117-123.

[8] 王伯荪,彭少麟. 南亚热带常绿阔叶林种间联结测定技术研究(Ⅰ):种间联结测式的探讨与修正[J]. 植物生态学与地植物学丛刊,1985(9):274-285.

[9] 杜荣骞. 生物统计学[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

[10] 朱利君,苏智先,胡进耀,等. 珙桐群落种间关系的研究[J]. 广西植物,2006,26(6):32-37.

[11] 刘萍萍,程积民. 植物种间联结关系的研究[J]. 水土

保持研究,2000,7(2):179-184.

[12] 刘金福,洪伟,李家和. 格氏栲群落生态学研究Ⅱ:格氏栲林主要种群的竞争研究[J]. 福建林学院学报,1998,18(1):24-27.

[13] 周叶先,王伯荪,李鸣光,等. 广东黑石顶自然保护区森林次生演替过程中群落的种间联结性分析[J]. 植物生态学报,2000,24(3):332-339.

[14] 邢韶华,赵勃,崔国发,等. 北京百花山草甸优势种的种间关联性分析[J]. 北京林业大学学报,2007,29(3):46-51.

(责任编辑:邓大玉)

(上接第 109 页)

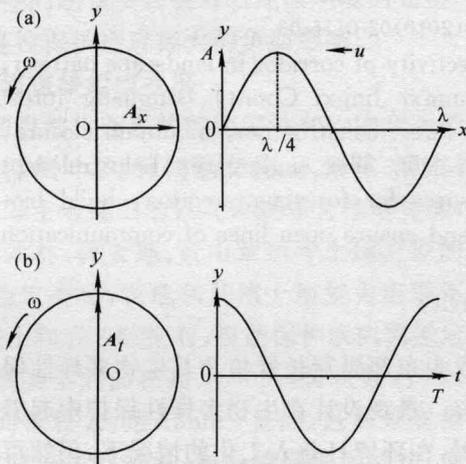


图 7  $t = 0$  时沿  $x$  轴负向传播的波形(a)和  $x = \lambda/4$  处的振动曲线(b)

### 5 结束语

通过对简谐振动与平面简谐波的相位特征的分

析以及类比于利用振动旋转矢量  $A_t$  描述简谐振动的方法,我们引入了波动旋转矢量  $A_x$  来描述时刻  $t_0$  的波形,并通过振动旋转矢量  $A_t$  和波动旋转矢量  $A_x$  来实现振动曲线与波形的相互转换. 这种方法的优点是直观、可靠,有利于学生在学习振动与波的内容时对相位的概念和相位变化的理解,也有利于正确作出波动过程中的波形和实现振动曲线与波形的相互转换.

#### 参考文献:

[1] 杨庆怡. 用旋转矢量描述简谐振动[J]. 广西大学学报:自然科学版,2002,27(Sup):145-147.

[2] 何长英. 旋转矢量在机械波教学中的应用[J]. 物理与工程,2007,17(4):15-17.

(责任编辑:韦廷宗)