广西科学院学报 2011,27(1):13~16
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 27, No. 1 February 2011

介观 RLC 串联电路的 5 种量子化方法
Five Quantization Methods of the Mesoscopic RLC Series Circuit

易施光，杨庆怡*
YI Shi-guang, YANG Qing-yi

(广西大学物理科学与工程技术学院，广西南宁 530004)
(College of Physical Science and Engineering Technology, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要：总结介观 RLC 串联电路进行量子化的受迫阻尼振子、构建哈密顿量和正则变换、阻尼谐振子正则变换、构建哈密顿量和幺正变换及电阻内部机制等 5 种不同方法，并分析量子化电路在真空态下的电荷、电流的量子涨落以及它们的乘积. 同一电路采用不同的量子化方法所得的结果不同，其根本原因在于对系统选择了不同的哈密顿量.

关键词：介观电路 量子化方法 量子涨落

中图法分类号：O431.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-7378(2011)01-0013-04

Abstract: The mesoscopic RLC series circuit are quantized by five different ways which are the forced damp harmonic vibration, the construct the Hamiltonian and associated canonical transformation, the damped harmonic vibration canonical transformation, the construct the Hamiltonian and associated unitary transformation and the inner construction of the resistance are summarized. The quantum fluctuations of the charge, the current and their products are analyzed when the system in the vacuum state. The different results from the same circuit quantized by different methods are due to the different chice of the Hamiltonion of the system.

Key words: mesoscopic circuit, quantization method, quantum fluctuation

对电路量子效应的研究首先需要对电路进行量子化. 早在 20 世纪 70 年代 Louisell[1] 对 LC 电路的量子化及其量子效应进行了研究，在这之后的 20 年时间里，人们对介观电路量子效应的研究进展不大. 首先打开介观电路量子效应研究新局面的是陈斌、李有泉及其合作者所做的工作[2~7]，之后，对介观电路的量子化及其量子效应的研究受到广泛的关注，王继锁[8,9]、于肇贤[10,11]、张智明[12]、范洪义[13]、崔元顺[14]等从不同的角度先后研究了分别处于不同的状态下介观 LC 电路、介观 RLC 电路以及介观耦合电路的量子效应，并得到了具有学术价值和意义的结果. 在对介观电路的研究取得可喜的成果的同时，也存在一些不尽人意的地方，比较典型的就是介观电路的量子化方法问题一直以来没有达成统一的共识. 由于 RLC 串联电路是介观电路中最典型的电路，本文以 RLC 串联电路为例对电路用不同量子化方法进行量子化，并对在不同量子化方法进行量子化的情形下得到的量子涨落结果进行探讨.

1 受迫阻尼谐振子的量子化方法

Dekker[2] 首先以受迫阻尼谐振子模型对 RLC 串联电路的量子化进行研究，由 RLC 串联电路的经典运动方程

$$L\dot{p}+Rp+\frac{q}{C}=\varepsilon(t)\ , \tag{1}$$

收稿日期：2010-05-25
作者简介：易施光(1973-)，男，硕士研究生，主要从事量子光学和介观电路量子特性的研究.
*通讯作者.

其中 $p=L(\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)=L\dot{q}$．引入复正则电荷和电流

$$Q=\frac{1}{\sqrt{\omega}}[j+(\lambda-i\omega)q]\text{，}\tag{2}$$

$$\pi=\frac{i}{2}Q^{*}=\frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{\omega}}[j+(\lambda+i\omega)q]\text{，}\tag{3}$$

其中，$j=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$，$\lambda=R/2L$，$\omega^2=\omega_0^2-\lambda^2$，$\omega_0^2=1/LC$．利用量子力学的处理方法得到在真空态下电荷和电流量子涨落分别为：

$$(\Delta q)^2=\frac{\hbar}{2L\omega}=\frac{\hbar\sqrt{C}}{\sqrt{4L-R^2C}}\text{，}\tag{4}$$

$$(\Delta j)^2=\frac{\hbar}{2C\omega}=\frac{\hbar L\omega_0^2}{2\omega}=\frac{L\hbar}{\sqrt{C}\sqrt{4L-R^2C}}\text{，}\tag{5}$$

$$(\Delta q)^2(\Delta j)^2=\frac{\hbar^2}{4LC\omega^2}=\frac{\hbar^2L}{4L-R^2C}.\tag{6}$$

受迫阻尼谐振子的量子化方法所得的电荷、电流的量子涨落以及它们的量子涨落积都只是与电路的电容、电感、电阻参数有关。

2 构建哈密顿量和正则变换方法

由经典的 RLC 串联电路运动方程构建哈密顿量[15]

$$H_q=\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\frac{p^2}{2L}+\exp\left(\frac{R}{L}t\right)\frac{q^2}{2C}-\exp\left(\frac{R}{L}t\right)q\varepsilon(t)+\alpha(t)\text{，}\tag{7}$$

作正则变换得

$$Q=\exp\left(\frac{R}{2L}t\right)q+f(t)\text{，}\tag{8}$$

$$P=\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)p+\frac{R}{2}\left[\exp\left(\frac{R}{2L}t\right)q+f(t)\right]+g(t)\text{，}\tag{9}$$

再利用有关量子力学的处理方法得到在真空态下电荷和电流量子涨落分别为：

$$(\Delta q)^2=\frac{\hbar}{2L\omega}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)=\frac{\hbar\sqrt{C}}{\sqrt{4L-R^2C}}\cdot\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\text{，}\tag{10}$$

$$(\Delta j)^2=\frac{\hbar}{2C\omega}\exp\left(\frac{R}{L}t\right)=\frac{L\hbar}{\sqrt{C}\sqrt{4L-R^2C}}\cdot\exp\left(\frac{R}{L}t\right)\text{，}\tag{11}$$

$$(\Delta q)^2(\Delta j)^2=\frac{\hbar^2}{4LC\omega^2}=\frac{\hbar^2L}{4L-R^2C}.\tag{12}$$

构建哈密顿量和正则变换方法所得的电荷量子涨落除了与电路的电容、电感、电阻参数有关外，还随时间呈指数递减，电流的量子涨落除了与电路的电容、电感、电阻参数有关外，还随时间呈指数递增，它们的量子涨落积只与电路的电容、电感、电阻参数有关。

3 阻尼谐振子正则变换方法

利用阻尼谐振子的类比，RLC 串联电路的运动方程[16]

$$L\dot{p}+Rp+\frac{q}{C}=\varepsilon(t)\text{，}\tag{13}$$

其中，$p=L(\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)=L\dot{q}$，通过正则变换

$$Q=q\exp\left(\frac{R}{2L}t\right)\text{，}\tag{14}$$

$$P=L\dot{Q}=\left(p-\frac{R}{2}q\right)\exp\left(\frac{R}{2L}t\right)\text{，}\tag{15}$$

则经典的运动方程变换为

$$\dot{Q}=\frac{P}{L}\text{，}\tag{16}$$

$$\dot{P}=-L\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)Q+\varepsilon(t)\exp\left(\frac{R}{2L}t\right)\text{，}\tag{17}$$

因为 $\partial\dot{Q}/\partial Q+\partial\dot{P}/\partial P=0$，所以 $[Q,P]=i\hbar$，运动方程量子化后的哈密顿量为

$$H=\frac{P^2}{2L}+\frac{1}{2}L\omega^2Q^2-Q\varepsilon(t)\exp\left(\frac{R}{2L}t\right)\text{，}\tag{18}$$

其中，$\omega^2=1/LC-R^2/4L^2$．利用有关量子力学的处理方法得到在真空态下电荷和电流量子涨落分别为：

$$(\Delta q)^2=\frac{\hbar}{2L\omega}\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)=\frac{\hbar\sqrt{C}}{\sqrt{4L-R^2C}}\cdot\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\text{，}\tag{19}$$

$$(\Delta j)^2=\frac{\hbar}{2C\omega}\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)=\frac{\hbar L}{\sqrt{C}\sqrt{4L-R^2C}}\cdot\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\text{，}\tag{20}$$

$$(\Delta q)^2(\Delta j)^2=\frac{\hbar^2}{4LC\omega^2}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)=\frac{\hbar^2L}{4L-R^2C}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right).\tag{21}$$

阻尼谐振子正则变换方法所得的电荷、电流的量子涨落以及它们的量子涨落积不仅都与电路的电容、电感、电阻参数有关，而且都随时间呈指数递减。

4 构建哈密顿量和幺正变换方法

由经典的 RLC 串联电路运动方程构建哈密顿量[17]

$$H=\frac{p^2}{2L}+\frac{R}{2L}(qp+pq)+\frac{q^2}{2C}-q\varepsilon(t)\ ,\quad (22)$$

其中，$p=L(\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)=Lj$，当 q,p 满足对易关系 $[q,p]=i\hbar$ 时，实现对电路的量子化. 为了实现哈密顿量的对角化，引入幺正算符

$$U=\exp\left(i\frac{R}{2\hbar}q^2\right)\ ,\quad (23)$$

则

$$H'=U^{+}HU=\frac{p^2}{2L}+\frac{1}{2}L\omega^2q^2-q\varepsilon(t)\ ,\quad (24)$$

其中，$\omega^2=\omega_0^2-R^2/L^2$，$\omega_0^2=1/LC$. 利用有关量子力学的处理方法得到在真空态下电荷和电流量子涨落分别为：

$$(\Delta q)^2=\frac{\hbar}{2L\omega}=\frac{\hbar}{2}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L-R^2C}}\ ,\quad (25)$$

$$(\Delta j)^2=\frac{\hbar}{2C\omega}=\frac{\hbar}{2}\frac{L}{\sqrt{C}\sqrt{L-R^2C}}\ ,\quad (26)$$

$$(\Delta q)^2(\Delta j)^2=\frac{\hbar^2\omega_0^2}{4\omega^2}=\frac{\hbar^2L}{4(L-R^2C)}\ .\quad (27)$$

构建哈密顿量和幺正变换方法所得的电荷、电流的量子涨落以及他们的量子涨落积与受迫阻尼谐振子的量子化方法形式相似，它们与电路的电容、电感、电阻参数有关，但是具体的表达式与受迫阻尼谐振子的量子化方法不同，区别在于，在构建哈密顿量和幺正变换方法中 $\omega^2=\omega_0^2-R^2/L^2$，而在受迫阻尼谐振子的量子化方法中 $\omega^2=1/LC-R^2/4L^2$。

5 电阻内部机制方法

把 RLC 串联电路中的能量分为 3 部分[18]：电容和电感中储存的电磁能，金属晶格的振动能以及电子或电荷与晶格的相互作用能. 晶格的振动可以用其准粒子即声子来描述. 则系统的哈密顿量

$$H=H_{em}+H_{ph}+H_{e-ph}\ ,\quad (28)$$

其中，

$$H_{em}=\frac{p^2}{2L}+\frac{1}{2}L\omega_0^2q^2-q\varepsilon(t)\ ,$$

$$H_{ph}=\sum_j\hbar\omega_j(a_j^+a_j+\frac{1}{2})=\sum_j(\frac{p_j^2}{2}+\frac{\omega_j^2x_j^2}{2})\ ,$$

$$H_{e-ph}=\int\rho(x,t)\phi(x,t)\mathrm{d}V=q\sum_jC_jx_j\ ,$$

利用有关量子力学的处理方法得到在真空态下电荷和电流量子涨落分别为：

$$(\Delta q)^2=\frac{\hbar}{2\pi L\omega}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\ ,\quad (29)$$

$$(\Delta j)^2=\frac{\hbar\omega_0^2}{2\pi L\omega}(\frac{\pi}{2}+\beta)\ ,\quad (30)$$

$$(\Delta q)^2(\Delta j)^2=\frac{\hbar^2\omega_0^2}{4\pi^2L^2\omega^2}(\frac{\pi}{2}+\alpha)(\frac{\pi}{2}+\beta)\ ,\quad (31)$$

其中：$\alpha=\arctan\left[(\omega_0^2-\eta^2/2)/\eta\sqrt{\omega_0^2-\eta^2/4}\right]$，

$$\beta=\frac{\omega_0^2-\frac{\eta^2}{2}}{\omega_0^2}\arctan\frac{\omega_0^2-\frac{\eta^2}{2}}{\eta\sqrt{\omega_0^2-\frac{\eta^2}{4}}}+\frac{\eta\sqrt{\omega_0^2-\frac{\eta^2}{4}}}{2\omega_0^2}\cdot$$

$$\ln\frac{(\Lambda^2-\omega_0^2+\frac{\eta^2}{2})^2+(\omega_0^2-\frac{\eta^2}{4})\eta^2}{(\omega_0^2-\frac{\eta^2}{2})^2+(\omega_0^2-\frac{\eta^2}{4})\eta^2}\ ,$$

其中，$\eta=R/L$，$\omega_0^2=1/LC$，$\omega^2=\omega_0^2-\eta^2/4$，$\Lambda$ 为声子的最大频率.

电阻内部机制方法与前面 4 种方法在内部机制上有本质的区别，前面 4 种可以说是一个系列的，都是把阻尼谐振子通过各种手段的变换等效成一个谐振子再用量子力学的方法进行处理，是一个整体的系统，而电阻内部机制方法实际上是把阻尼谐振子等效为两个系统，并且两个系统之间有相互作用，这种方法从形式上必然比前 4 种方法要繁琐，处理过程也相对复杂，但是这样所描述的结果在一定程度上比前面 4 种方法更加全面.

6 结束语

本文以 RLC 串联电路为例子，分别对用 5 种量子化方法对 RLC 串联电路进行量子化以及在真空态下电荷和电流的量子涨落和它们的量子涨落之积进行了分析和讨论，发现不同方法所得结果不同的根本原因在于，在量子力学中，对运动方程的哈密顿量的选择不是惟一的，存在不同的量子化方法就是因为选择了不同的哈密顿量. 尽管通过不同的量子化方法得到的结果有区别，但是，当 $R=0$ 时，电路在真空态下的量子涨落都是一样的，即：$(\Delta q)^2=\hbar/2L\omega_0$，$(\Delta j)^2=\hbar/2C\omega_0$，$(\Delta q)^2(\Delta j)^2=\hbar^2/4L^2$. 究竟应该选择一个怎样的哈密顿量才更加合适，这还有待于进一步的讨论和实验的验证.

参考文献：

[1] Louisell W H. Quantun statistical properties of radiation[M]. New York: John Wiley, 1973: 231-237.

[2] Chen Bin, Li Youquan, Fang Hui, et al. Quantum effects in a mesoscopic cicuit [J]. Physics Letters A, 1995, 205: 121-124.

[3] 陈斌，高守恩，焦正宽．低温下介观电路的量子涨落[J]．物理学报，1995，44(9)：1480- 1483.

[4] 陈斌，方挥，焦正宽，等．介观电路中电荷、电流的量子涨落[J]．科学通报，1996，41(13)：1170-1172.

[5] 陈斌，李有泉，沙键，等．介观耦合电路的量子压缩效应[J]．科学通报，1996，41(14)：1275- 1277.

[6] Li Youquan, Chen Bin. Quantum theory for mesoscopic electric circuits[J]. Phys Rev B, 1996, 53(7): 4027-4032.

[7] 陈斌，李有泉，沙健，等．介观电路中电荷的量子效应[J]．物理学报，1997，46(1)：0129- 0133.

[8] 王继锁，孙长勇．压缩真空态下介观电路的量子涨落[J]．物理学报，1997，46(10)：2007- 2009.

[9] Wang Jisuo, Sun Changyong. Quantum effects of mesoscopic RLC circuit in squeezed vacuum state[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1998, 37(4): 1213-1216.

[10] Yu Zhaoxian, Zhang Dexing, Liu Yehou. Quantum mechanical effects of a nondissipative mesoscopic capacitance coupling circuit with source [J]. International Journal of Theoretical Physics, 1997, 36(9): 1965-1971.

[11] Yu Zhaoxian, Liu Yehou. Coulomb blockade and quantum fluctuation of a nondissipative mesoscopic capacitance coupling circuit with source[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1998, 37(4): 1217-1223.

[12] Zhang Zhiming, He Linsheng, Zhou Shikang. A quantum theory of an RLC circuit with a source[J]. Physics Letters A, 1998, 244(4): 196-200.

[13] Fan Hongyi, PAN Xiaoyin. Quantization and squeezed state of two LC circuit with mutual-inductance[J]. Chinese Physics Letters, 1998, 15(9): 625-627.

[14] 崔元顺．介观LC电路中电压、电流的量子涨落[J]．光子学报，1998，27(6)：517-520.

[15] 刘艳辉，金哲，张寿．有源RLC介观电路的量子涨落[J]．量子光学学报，2002，8(3)：118- 120.

[16] 顾永建．关于有源RLC电路的量子化[J]．大学物理，2000，19(6)：12-13,48.

[17] Wang Jisuo, Liu Tangkun, Zhan Mingsheng. Quantum wave functions and fuluctuations of mesoscopic RLC circuit [J]. Chinese Physics Letters, 2000, 17(7): 528-529.

[18] 梁麦林，袁兵．关于介观有源RLC电路的量子化及其量子涨落[J]．量子电子学报，2002，19(1)：53-56.

（责任编辑：韦廷宗）

（上接第9页）

参考文献：

[1] Kermack W O, McKendrick A G. Contribution to the mathematical theory of epidemic[J]. Proc Roy Soc, 1932, 138(1): 55-83.

[2] Li J, Ma Z. Qualitative analyses of SIS epidemic model with vaccination varying total population size [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 35: 1235-1243.

[3] P Van Den Driessche, James Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciencs, 2002, 180(special issue): 29-48.

[4] Eichner M, Hadeler K P. Deterministic models for the eradication of poliomyelitis : vaccination with the inactived(IPV) and attenuated(OPV) polio virus vac-cine [J]. Mathematical Biosciencs, 1995, 127(2): 149-166.

[5] 徐为坚．具有种群Logistic增长饱和传染率的SIS模型的稳定性和Hopf分支[J]．数学物理学报，2008，28A(3)：578-584.

[6] Fan M, Li M Y, Wang K. Global stability of an SEIS epidemic model with recruitment and a varying total Population size [J]. Mathematical Biosciencs, 2001, 170: 199-208.

[7] Li J, Zhang J, Ma Z. Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration [J]. Applied mathematical and mechanics, 2004, 25(4): 396-404.

[8] 李建全，马知恩．一类带有接种的流行模型的全局稳定性[J]．数学物理学报，2006，26A(1)：021-030.

[9] Capasso V, Serio G. A generalization of the Kermack-Mckendrick deterministic epidemic model [J]. Math Biosci, 1978, 42: 41-61.

[10] Freedman H I, Sree Hari Rao V. The trade off between nmtual interference and time lags in predator-prey systems [J]. Bull Math Biol, 1983, 45: 991-1003.

[11] Hassard B, Kazarinoff N, Wan Y H. Theory and applications of Hopf Bifurcation. London Math [M]. Sok Lect Notes, Series, 41. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1981.

（责任编辑：韦廷宗）