广西科学院学报 2011,27(3):182～183,192
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 27, No. 3 August 2011

# 1：—2 共振系统高次奇点的广义奇点量与可积性

# Generalized Singular Point Quantity and Integrability of the Degenerate Resonant Singular Point of 1：—2 Resonant System

李慧丽，黄文韬
LI Hui-li, HUANG Wen-tao

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院，广西桂林 541004)
(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要**：利用同胚变换，把 $p:-q$ 共振系统的高次奇点化为初等奇点，通过研究初等奇点的性质来研究高次奇点的性质，并运用计算机代数系统求出初等奇点的前 20 个奇点量，从而得到 1：—2 系统在原点邻域可积的必要条件，并证明这些条件的充分性.

**关键词**：共振系统 高次奇点 奇点量 可积性

**中图法分类号**：O175.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-7378(2011)03-0182-02

**Abstract**: In this article, integrability of the degenerate resonant singular point of a $p:-q$ resonant system are studied. Firstly, by means of a homeomorphous transformation, the degenerate resonant singular point of the $p:-q$ resonant system is transformed into the elementary singular point. Hence the problem is transformed into the study of elementary singular point. The top 20 singular point values are given by using Compute Algebra Mathematica. Then the necessary conditions for the integrability are worked out. At last, the sufficiency of these conditions is proved.

**Key words**: resonant system, degenerate resonant singular point, singular point value, integrability

微分系统可积性的判定，特别是 $p:-q$ 共振微分系统的可积性的判定是微分方程定性理论的热点问题. 在平面多项式微分系统定性理论中，对于原点是初等奇点的奇点量与可积性问题的研究已经有很多成果[1,2]. 对于原点是高次奇点的多项式系统的奇点量与可积性问题的研究也有一些成果[3~5]. 但是对于具有高次奇点的 $p:-q$ 共振系统的可积性的研究，特别是对形如

$$\frac{dz}{dT}=pz^{n+1}w^n+\sum_{\alpha+\beta=2n+2}^{\infty}a_{\alpha\beta}z^{\alpha}w^{\beta},$$

$$\frac{dw}{dT}=-qw^{n+1}z^n-\sum_{\alpha+\beta=2n+2}^{\infty}b_{\alpha\beta}w^{\alpha}z^{\beta},\tag{1}$$

(其中 $z,w,T$ 均为复变量，系数为复数) 的系统的可积性问题研究成果很少有报道[6,7].

本文研究如下一类 $p:-q$ 共振系统高次奇点的性质，并给出了 1：—2 共振系统的可积性条件：

$$\frac{dz}{dT}=z^2w(p+a_{20}z^2+a_{02}w^2),$$

$$\frac{dw}{dT}=-w^2z(q+b_{20}w^2+b_{02}z^2).\tag{2}$$

## 1 基本定义及引理

考虑系统

$$\frac{dz}{dT}=pz+\sum_{\alpha+\beta=2n+2}^{\infty}a_{\alpha\beta}z^{\alpha}w^{\beta},$$

**收稿日期**：2010-03-25

**作者简介**：李慧丽(1987-)，女，硕士研究生，主要从事微分系统可积性研究。

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T}=-qw-\sum_{\alpha+\beta=2n+2}^{\infty}b_{\alpha\beta}w^{\alpha}z^{\beta}. \tag{3}$$

**引理 1**[1] 对于系统(3),可以逐项确定形式级数 $F(z,w)=\sum_{\alpha+\beta=p+q}^{\infty}c_{\alpha\beta}z^{p}w^{q}$,使得 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T}=\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m(z^pw^q)^{m+1}$,其中当 $\alpha+\beta\leqslant p+q$ 时 $c_{\alpha\beta}=0(c_{pq}=1)$,当 $p\alpha=q\beta$ 时 $c_{\alpha\beta}=0$,当 $p\alpha-q\beta\neq 0$ 时,$c_{\alpha\beta}$ 由递推公式

$$c_{\alpha\beta}=\frac{1}{q\beta-p\alpha}\sum_{k+j=3}^{\infty}[(\alpha-k+1)a_{k,j-1}-(\beta-j+1)b_{j,k-1}]c_{\alpha-k+1,\beta-j+1} \tag{4}$$

确定.对任意正整数 $m$,$\mu_m$ 由递推公式

$$\mu_m=\sum[(qm+q-k+1)a_{k,j-1}-(pm+p-j+1)b_{j,k-1}]c_{qm+q-k+1,pm+p-j+1} \tag{5}$$

确定,$\forall(k,j)$,当 $k<0$ 或 $j<0$ 时,已经令 $a_{kj}=b_{kj}=c_{kj}=0$.

**定义 1** 对任意正整数 $k$,引理 1 中的 $\mu_m$ 被称为系统(3) 原点的 $k$ 阶奇点量.

**定义 2** 若存在原点邻域解析的函数 $H(z,w)$ 满足 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}=\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T}+\frac{\partial H}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T}=0$,则 $H(z,w)=C$ 称为系统(3) 的首次积分.

**定义 3** 系统(3) 称为在原点可积,当且仅当系统(3) 在原点领域存在解析首次积分.

**引理 2**[8] 系统(3) 在原点领域存在首次积分 $H(z,w)=C$ 的充分必要条件是存在积分因子,即存在在原点领域解析的函数 $J(z,w)$,满足 $J(0,0)\neq 0$,且 $\frac{\partial}{\partial z}(J\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T})-\frac{\partial}{\partial w}(J\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T})=0$.

**引理 3**[1] 系统(3) 在原点可积的充分必要条件是原点的广义奇点量全部为零,即原点为系统(3) 的广义中心.

## 2 主要结论

通过变换 $z=u(u^2+v^2)^2$,$w=v(u^2+v^2)^2$,$\mathrm{d}T=(z^2+w^2)^{-1}\mathrm{d}t$,系统(2) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})u+(\frac{3a_{20}}{5}+\frac{2b_{02}}{5})u^7v^4+(\frac{3a_{02}}{5}+\frac{2b_{20}}{5})u^5v^6,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-[(\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})v+(\frac{2a_{02}}{5}+\frac{3b_{20}}{5})u^4v^7+(\frac{2a_{20}}{5}+\frac{3b_{02}}{5})u^6v^5]. \tag{6}$$

为了讨论系统原点的奇点量,根据引理 1 可得到系统(6) 原点的奇点量的递推公式.

**定理 1** 系统(6) 在原点的奇点量 $\mu(m)$($m$ 是正整数) 由下列递推公式给出:

当($\alpha<0\parallel\beta<0\parallel((\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})\alpha=(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})\beta$ 且 $\alpha\neq 1,\beta,1)\parallel\alpha+\beta\leqslant p+q$),$c(\alpha,\beta)=0$,而

$$c(\alpha,\beta)=\frac{1}{-(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})\alpha+(\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})\beta}[((\alpha-6)(\frac{3a_{20}}{5}+\frac{2b_{02}}{5})-(\beta-4)(\frac{2a_{20}}{5}+\frac{3b_{02}}{5}))\times c(\alpha-6,\beta-4)+((\alpha-4)(\frac{3a_{02}}{5}+\frac{2b_{20}}{5})-(\beta-6)(\frac{2a_{02}}{5}+\frac{3b_{20}}{5}))c(\alpha-4,\beta-6)],$$

$$\begin{aligned}\mu(m)={}&c((\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})+m(\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})-6,(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})+m(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})-4)\times[((m+1)(\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})-6)(\frac{3a_{20}}{5}+\frac{2b_{02}}{5})-((m+1)(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})-4)(\frac{2a_{20}}{5}+\frac{3b_{02}}{5})]\\&+c((\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})+m(\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})-4,(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})+m(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})-6)\times[((m+1)(\frac{2p}{5}+\frac{3q}{5})-4)(\frac{3a_{02}}{5}+\frac{2b_{20}}{5})-((m+1)(\frac{3p}{5}+\frac{2q}{5})-6)(\frac{2a_{02}}{5}+\frac{3b_{20}}{5})].\end{aligned}$$

运用定理 1 中的递推公式,系统(6) $|_{p=1,q=2}$ 在原点的奇点量即可通过计算机计算出来.

**定理 2** 系统(6) $|_{p=1,q=2}$ 在原点的前 20 个奇点量如下:

$$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5=\mu_6=\mu_7=\mu_8=\mu_9=0,\mu_{10}=\frac{1}{10}b_{02}(2a_{02}a_{20}+a_{20}b_{20}-b_{02}b_{20}),$$

$$\mu_{11}=\mu_{12}=\mu_{13}=\mu_{14}=\mu_{15}=\mu_{16}=\mu_{17}=\mu_{18}=\mu_{19}=0,\mu_{20}=0.$$

在上述 $\mu(k)$ 的表达式中,已经置 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{k-1}=0$,$k=2,3,\cdots,20$.

**定理 3** 系统(6) $|_{p=1,q=2}$ 在原点的前 20 个奇点量都为零当且仅当下列条件之一成立:

(Ⅰ) $b_{02}=0$,

(Ⅱ) $a_{02}=0,a_{20}=b_{02}$,

(Ⅲ) $b_{02}-a_{20}\neq 0,b_{20}(b_{02}-a_{20})=2a_{02}a_{20}$.

**定理 4** 对于系统(6) $|_{p=1,q=2}$,原点的所有奇点量都为零的充分必要条件是原点的前 20 个奇点

(下转第 192 页)

Probit 模型及 Logit 模型均把螓虫个体 16、17 判定为 Apf，而把螓虫个体 18 判定为 Af；Extreme 模型则是把螓虫个体 16 判定为 Apf，而把螓虫个体 17、18 判定为 Af。也就是说，对于螓虫个体 17 的判定三种模型并不完全一致，此时，如果认为将 Apf 错判为 Af 的危害要比把 Af 误判为 Apf 的大，则建议采用 Probit 模型及 Logit 模型且判定为 Apf；否则，采用 Extreme 模型而且判定为 Af。

**表 4 螓虫分类的二元选择模型的拟合结果和预测结果**

| 模型<br>样本 | Probit 模型 | | Logit 模型 | | Extreme 模型 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 拟合值 | 拟合概率 | 拟合值 | 拟合概率 | 拟合值 | 拟合概率 |
| 1 | 103.50 | 1.00 | 179.39 | 1.00 | 147.18 | 1.00 |
| 2 | 53.50 | 1.00 | 94.02 | 1.00 | 83.91 | 1.00 |
| 3 | 85.97 | 1.00 | 151.93 | 1.00 | 125.62 | 1.00 |
| 4 | 44.79 | 1.00 | 79.12 | 1.00 | 72.87 | 1.00 |
| 5 | 26.49 | 1.00 | 46.76 | 1.00 | 49.43 | 1.00 |
| 6 | 81.83 | 1.00 | 145.11 | 1.00 | 120.45 | 1.00 |
| 7 | 92.73 | 1.00 | 166.40 | 1.00 | 134.92 | 1.00 |
| 8 | 121.50 | 1.00 | 218.77 | 1.00 | 172.15 | 1.00 |
| 9 | 71.60 | 1.00 | 131.07 | 1.00 | 108.37 | 1.00 |
| 10 | −61.12 | 0.00 | −114.18 | 0.00 | −64.32 | 0.00 |
| 11 | −83.13 | 0.00 | −152.08 | 0.00 | −92.25 | 0.00 |
| 12 | −50.66 | 0.00 | −94.17 | 0.00 | −50.53 | 0.00 |
| 13 | −53.92 | 0.00 | −98.43 | 0.00 | −54.33 | 0.00 |
| 14 | −44.34 | 0.00 | −80.97 | 0.00 | −41.92 | 0.00 |
| 15 | −25.60 | 0.00 | −47.34 | 0.00 | −17.79 | 0.00 |
| 16 | −17.75 | 0.00 | −34.99 | $6.66\times10^{-16}$ | −8.13 | 0.00 |
| 17 | −7.73 | $5.44\times10^{-15}$ | −16.25 | $8.72\times10^{-8}$ | 4.96 | 0.99 |
| 18 | 4.04 | 0.99 | 7.59 | 0.99 | 20.81 | 1 |

## 3 结束语

采用二元选择模型对螓虫分类问题进行研究具有极高的拟合优度及较好的估计效果。这种分类方法具有直观的解析意义及便于软件实现的优点，可应用于疾病的诊断、投资的决策分析、项目的评估等模式识别问题的研究。

**参考文献：**


[1] Grogan W L, Wirth W W. A new American genus of predaceous midges related to palpomyia and bezzia (Diptera: Ceratopogonidae)[J]. Proceedings of the Biological Society of Washington, 1981, 94: 1279-1305.

[2] 何水明. 采用同伦 BP 算法进行螓虫分类[J]. 湖北工业大学学报, 2007, 22(1): 65-66.

[3] 冯增哲，王清，王昌元，等. 一种基于支持向量机的螓虫分类方法[J]. 中国科技信息, 2007(4): 207-268.

[4] 王琪. 基于模糊模式识别的螓虫分类数学模型[J]. 咸宁学院学报, 2010, 30(12): 59-60.

[5] 李子奈，叶阿忠. 高等计量经济学[M]. 北京：清华大学出版社, 2000: 155-163.

[6] 高铁梅. 计量经济分析方法与建模——Eviews 应用及实例[M]. 北京：清华大学出版社, 2009: 219-242.


（责任编辑：邓大玉）

（上接第 183 页）

量为零，从而系统(6) $|_{p=1,q=2}$ 在原点可积的充分必要条件是定理 4 中的 3 个条件之一成立. 由于变换是同胚的，即系统(2) $|_{p=1,q=2}$ 在原点可积的充分必要条件是定理 4 中的 3 个条件之一成立.

**证明** 如果条件(Ⅰ)成立，系统(2) $|_{p=1,q=2}$ 有积分因子 $J=u^{-4}v^{-3}(1+\frac{1}{2}v^2b_{20})^{-\frac{1}{2}-\frac{a_{02}}{b_{20}}}$. 如果条件(Ⅱ)成立，系统(2) $|_{p=1,q=2}$ 有积分因子 $J=u^{-6}v^{-4}$. 如果条件(Ⅲ)成立，系统(2) $|_{p=1,q=2}$ 有积分因子 $J=u^{-\frac{2(4a_{20}-b_{02})}{2a_{20}-b_{02}}}v^{-\frac{2(3a_{20}-b_{02})}{2a_{20}-b_{02}}}$. 证明完毕.

**参考文献：**


[1] 肖萍. 复平面多项式共振微分系统的奇点量与可积性条件[D]. 长沙：中南大学博士学位论文, 2005.

[2] Jaume Giné, Valery G Romanovski. Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quintic systems[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(3): 2100-2105.

[3] 刘一戎. 高次奇点与无穷远点的中心焦点理论[J]. 中国科学, 2001(A31): 37-48.

[4] Wu Yusen, Zhang Gui, Li Peiluan. Isochronicity problem of higher-order singular point for polynomial differential systems [J]. Acta Appl Math, 2010, 110: 1429-1448.

[5] 黄文韬. 微分自治系统的几类极限环分支与等时中心问题[D]. 长沙：中南大学博士学位论文, 2004.

[6] Zhang Qi, Gui Weihua, Liu Yirong. The generalized center problem of degenerate resonant singular point [J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215: 1507-1512.

[7] Zhang Qi, Liu Yirong, Gui Weihua. Generalized singular point quantity and integrability of degenerate resonant singular point[J]. Bull Sci math, 2009, 133: 198-204.

[8] 刘一戎，李继彬. 论复自治系统的奇点量[J]. 中国科学, 1989(A3): 245-255.


（责任编辑：尹 闯）