$R(4,1\times n)$型图的边标号*
Edge Labeling of $R(4,1\times n)$ Graphs

郑学谦，乔晓云
ZHENG Xue-qian, QIAO Xiao-yun

（山西大学商务学院理学系，山西太原 030031）
(Department of Mathematics and Physics, Business College of Shanxi University, Taiyuan, Shanxi, 030031, China)

摘要：证明当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是 k-边优美图、超边优美图和边友好图.

关键词：$R(4,1\times n)$ 型图　k-边优美图　超边优美图　边友好图
中图法分类号：O157.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：1002-7378(2011)03-0184-02

Abstract: It is proved that if $n\equiv 1(\bmod 2)$, the $R(4,1\times n)$ is a k-edge-graceful graph, super edge-graceful graph and E-cordial graph.

Key words: $R(4,1\times n)$ graph, k-edge-graceful graph, super edge-graceful graph, E-cordial graph

图的标号问题源于 60 年代中期 G. Ringel 和 A. Rosa 提出的优美树猜想，现已成为图论研究中一个重要而活跃的分支. 图的边标号[1]是图论中一个比较新的课题，也是比较难的课题，即使是对某些特殊图，要给出其边标号也很困难. 本文给出当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图的 k-边优美标号，超边优美标号和边友好标号，即证明了当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是 k-边优美图、超边优美图和边友好图.

1 基本概念

定义 1.1[2]　对于一个简单图 $G(V,E)$，$|V|=p$，$|E|=q$. 若存在双射 $f:E(G)\to\{k,k+1,\cdots,k+q-1\}$，其中 k 为给定的正整数，使得边导出映射 $f^+:V\to\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 为双射，此处 f^+ 定义为：$\forall v\in V$，u 是与 v 相邻的顶点，$f^+(v)=\sum\limits_{uv\in E}f(uv)(\bmod p)$，则称 G 为 k-边优美图，并称 f 为 G 的 k-边优美标号，f^+ 为 f 导出的顶点标号.

定义 1.2[3]　对于一个简单图 $G(V,E)$，$|V|=p$，$|E|=q$. 当 p,q 为奇数时，存在双射 $f:E\to\left\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\right\}$，使得边导出映射 $f^+:V\to\left\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{p-1}{2}\right\}$ 为双射，此处 f^+ 定义为：$\forall v\in V$，u 是与 v 相邻的顶点，$f^+(v)=\sum\limits_{uv\in E}f(uv)$；当 p,q 为偶数时，若存在双射 $f:E\to\left\{\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{q}{2}\right\}$，使得边导出映射 $f^+:V\to\left\{\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{p}{2}\right\}$ 为双射，此处 f^+ 定义为：$\forall v\in V$，u 是与 v 相邻的顶点，$f^+(v)=\sum\limits_{uv\in E}f(uv)$，则称 f 是超边优美标号，图 G 是超边优美图，f^+ 为 f 导出的顶点标号.

定义 1.3[4]　对于一个简单图 $G(V,E)$，存在映射 $f:E(G)\to\{0,1\}$，边导出映射：$f^*:V(G)\to\{0,1\}$，定义 $\forall v\in V$，u 是与 v 相邻的顶点，$f^*(v)=\sum\limits_{uv\in E}f(uv)(\bmod 2)$. 对于 $i\in\{0,1\}$，记 $m_i(f)=|\{e\in E(G):f(e)=i\}|$，$n_i(f)=|\{v\in V(G):f^*(v)=i\}|$. 若有 $|m_0(f)-m_1(f)|\leqslant 1$，$|n_0(f)-n_1(f)|\leqslant 1$，则称 G 为边友好图，f 是边友好标号，f^* 是边导出的顶点标号.

定义 1.4[5]　由圈 C_m 的点 v_0 与 n 条 p_2 路粘接所得到的图形，称为 $R(m,1\times n)$ 型图，如 $R(4,1\times$

收稿日期：2011-05-20
作者简介：郑学谦(1979-)，男，硕士，主要从事组合数学研究。
* 山西大学商务学院院级科研基金项目(JG2011028)资助。

n)(图 1).

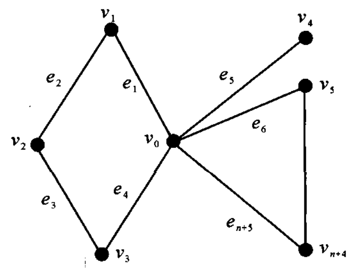

图 1 $R(4,1\times n)$

2 主要结论

定理 2.1 当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是 k - 边优美图.

证明 给出边标号：

$f(e_1)=k, f(e_2)=q-k, f(e_3)=q, \{f(e_i)\mid 4\leqslant i\leqslant q\}=\{k,k+1,\cdots,k+q-1\}\backslash\{k,q-k,q\}$.

令 $D_i=\{f(e_i)\mid 1\leqslant i\leqslant q\}, D_1=\{k\}, D_2=\{q-k\}, D_3=\{q\}, D_i=\{k,k+1,\cdots,k+q-1\}\backslash\{k,q-k,q\}, 4\leqslant i\leqslant q$.

$D=\bigcup_{i=1}^{q} D_i=\{k\}\cup\{q-k\}\cup\{q\}\cup\{\{k,k+1,\cdots,k+q-1\}\backslash\{k,q-k,q\}\}=\{k,k+1,\cdots,k+q-1\}$.

显然每条边的标号不同，所以 f 为双射.

再定义 $S_i=\{f^*(v_i)\mid 0\leqslant i\leqslant p-1\}, f^*(v_i)=\sum_{uv\in E} f(v_iv_{i+1}), 0\leqslant i\leqslant p-1, f^+(v_i)=\sum_{uv_i\in E} f(v_iv_{i+1})(\bmod p), 0\leqslant i\leqslant p-1$,

$S_0=\{q\}, S_1=\{q-k\}, S_3=\{k\}, S_i=\{f(e_i)\mid 4\leqslant i\leqslant p-1\}\cup\{f(e_2)\}=\{k,k+1,\cdots,k+q-1\}\backslash\{k,q-k,q\}$,

$S=\bigcup_{i=0}^{p-1} S_i=\{k,k+1,\cdots,k+q-1\}$.

因为 $p=q$，故将集合 S 中的每一个元素都模去 p 得到 $S'=\{0,1,\cdots,p-1\}$，所以 f^+ 为双射.

综上所述，当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是 k - 边优美图.

定理 2.2 当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是超边优美图.

证明 给出边标号：

$f(e_1)=1, f(e_2)=-1, f(e_3)=0, f(e_4)=2, \{f(e_i)\mid 5\leqslant i\leqslant q\}=\{0,\pm 1,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\}\backslash\{0,-1,1,2\}$.

令 $D_i=\{f(e_i)\mid 1\leqslant i\leqslant q\}, D_1=\{1\}; D_2=\{-1\}, D_3=\{0\}, D_4=\{2\}, D_i=\{0,\pm 1,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\}\backslash\{0,-1,1,2\}, 5\leqslant i\leqslant q$.

$D=\bigcup_{i=1}^{q} D_i=\{1\}\cup\{-1\}\cup\{0\}\cup\{2\}\cup\{\{0,\pm 1,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\}\backslash\{0,-1,1,2\}\}=\{0,\pm 1,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\}$.

显然每条边的标号不同，所以 f 为双射.

再定义 $S_i=\{f^+(v_i)\mid 0\leqslant i\leqslant p-1\}, f^+(v_i)=\sum_{uv\in E} f(v_iv_{i+1}), 0\leqslant i\leqslant p-1$,

$S_0=\{1\}, S_1=\{0\}, S_2=\{-1\}, S_3=\{2\}, S_i=\{0,\pm 1,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\}\backslash\{0,-1,1,2\}$,

$S=\bigcup_{i=0}^{p-1} S_i=\{1\}\cup\{-1\}\cup\{0\}\cup\{2\}\cup\{0,\pm 1,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\}=\{0,\pm 1,\cdots,\pm\frac{q-1}{2}\}$.

很明显每个顶点的标号不同，所以 f^+ 为双射. 由超边优美图的定义得，当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是超边优美图.

定理 2.3 当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是边友好图.

证明 给出边标号：

$f(e_1)=1, f(e_2)=1, f(e_3)=0, f(e_4)=0$,

$$f(e_i)=\begin{cases}0, i\text{ 为偶数}\\ 1, i\text{ 为奇数}\end{cases}\quad i=5,6,\cdots,q.$$

当 q 为奇数时 $|m_0(f)-m_1(f)|=1$，所以 $|m_0(f)-m_1(f)|\leqslant 1$.

令 $f^+(v_i)=\sum_{uv\in E} f(v_iv_{i+1}), 1\leqslant i\leqslant p, f^+(v_1)=0, f^+(v_2)=1, f^+(v_3)=0, f^+(v_0)=1$,

$$f^+(v_i)=\begin{cases}0, i\text{ 为偶数}\\ 1, i\text{ 为奇数}\end{cases}\quad i=5,6,\cdots,p.$$

当 p 为奇数时，$|n_0(f)-n_1(f)|=1$，所以 $|n_0(f)-n_1(f)|\leqslant 1$. 由边友好图的定义得，当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$R(4,1\times n)$ 型图是边友好图.

参考文献：

[1] Lo S P. On edge-graceful labelings of graphs[J]. Congress, Numberantium, 1985, 50: 231-241.

[2] 刘晓姗. $C_n\times C_m$ 的 k - 边优美的图标号[J]. 江汉大学学报：自然科学版，2006(3): 16-18.

[3] Lee S M, Chen E, Yera E, et al. On super edge-graceful $(p,p+1)$ -Graphs[J]. Congr Number, 2004, 171: 51-65.

[4] Yilmaz R, Cahit I. E - cordial graphs[J]. Ars Combin, 1997, 46: 251-256.

[5] 李春香，阎心丽. $R(4,1\times n)$ 的型图的优美性[J]. 哈尔滨工程学院学报，2001(3): 239-240.

（责任编辑：尹　闯）