

# 一类脉冲免疫 SIR 传染病模型的无病 $\tau$ 周期解的存在性与稳定性\*

## Existence and Stability of Infection-free Periodic Solutions to Impulsively Vaccinating SIR Epidemic Model

黄娜, 石志杰, 黄健民

HUANG Na, SHI Zhi-jie, HUANG Jian-min

(广西师范大学, 广西桂林 541004)

(Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要:**在脉冲免疫接种条件下,利用频闪映射的离散动力系统、Floquet 乘子理论和脉冲微分方程比较定理,讨论一类具有阶段结构和 Logistic 死亡率的脉冲免疫接种 SIR 传染病模型,得到系统的无病  $\tau$  周期解以及无病  $\tau$  周期解的存在性和全局渐近稳定性的充分条件.

**关键词:**脉冲方程 免疫接种 SIR 模型 全局渐近稳定性  $\tau$  周期解

**中图分类号:**O175 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-7378(2011)04-0294-05

**Abstract:**An SIR epidemic model with generalized logistic death rate and stage structured was established. Using the discrete dynamical system determined by the stroboscopic map, an infection free periodic solution of the model under impulsive vaccination was obtained. Based on Floquet theory and the comparison theorem of impulsive differential equation, the analysis of global asymptotic stability of the infection free periodic solution was illustrated.

**Key words:**impulsive differential equations, impulsive vaccination, SIR model, global asymptotic stability,  $\tau$  periodicsolution

免疫接种是公共卫生领域中控制传染病的常用方法,分为连续接种和脉冲接种两种形式.脉冲接种是指在短时间内对易感染人群进行免疫,对周期性突然爆发的流行病有很好的控制作用.通常情况下,为了有效地控制传染病的发生和流行,往往需要在给定的时间点进行免疫接种<sup>[1]</sup>.因此,一些传染病模型用具有脉冲免疫接种的脉冲微分方程描述更符合实际. Stone 等<sup>[2]</sup>研究具有脉冲预防接种 SIR 模型,给出了无病  $\tau$  周期解的局部渐近稳定性.种群的密度制约会影响到种群的死亡率系数,因此种群模型的死亡率系数有考虑密度制约的必要.赵文才等<sup>[3]</sup>研究具有 Logistic 死亡率的脉冲免疫接种 SIRS 传染病模型,获得了系统一致持续生存的条件.由于不

同年龄结构的种群在影响疾病传播方面存在差异,所以在传染病模型中引入年龄结构也是实际的需要.在自然界,许多生物群体用具有阶段结构的模型来描述更加符合实际<sup>[4~6]</sup>,而且对具有年龄结构的人口模型的研究已经取得了非常丰富的结果<sup>[7,8]</sup>.近来,张小兵等<sup>[9]</sup>研究了一类具有阶段结构和脉冲免疫的 SIR 传染病模型,得到模型的无病  $\tau$  周期解全局吸引和系统持久的充分条件.

基于以上研究的启发,本文研究具有阶段结构和 Logistic 死亡率的脉冲免疫接种 SIR 传染病模型,得到无病  $\tau$  周期解全局渐近稳定性的充分条件.

### 1 SIR 模型的建立

假设  $N(t), S_1(t), S_2(t), I(t), R(t)$  分别表示  $t$  时刻种群总数,幼年易感者,成年易感者,感染者和移出者的数量,则本文所考虑的具有阶段结构的脉冲免疫接种 SIR 模型如下:

收稿日期:2011-05-25

修回日期:2011-06-17

作者简介:黄娜(1986-),女,硕士研究生,主要从事生物数学研究.

\* 国家自然科学基金项目(10961005)资助.

$$\left\{ \begin{aligned} S_1'(t) &= bN(t) - \frac{\beta_1 I(t)S_1(t)}{N(t)} - mS_1(t) - \\ &\quad \left(d + \frac{\mu N(t)}{K}\right)S_1(t), \\ S_2'(t) &= mS_1(t) - \frac{\beta_2 I(t)S_2(t)}{N(t)} - \\ &\quad \left(d + \frac{\mu N(t)}{K}\right)S_2(t), \\ I'(t) &= \frac{\beta_1 I(t)S_1(t)}{N(t)} + \frac{\beta_2 I(t)S_2(t)}{N(t)} - \alpha I(t) - \\ &\quad \left(d + \frac{\mu N(t)}{K}\right)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \left(d + \frac{\mu N(t)}{K}\right)R(t), \\ N'(t) &= \mu\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) - \alpha I(t), \\ S_1(t^+) &= S_1(t) - \theta bN(t), \\ S_2(t^+) &= S_2(t), \\ I(t^+) &= I(t), \\ R(t^+) &= R(t) + \theta bN(t), \\ N(t^+) &= N(t). \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{array}{l} t \neq k\tau, \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ t = k\tau. \end{array} \right.$$

(1) 式中,  $\gamma$  表示移出率系数,  $\alpha$  表示因病死亡率;  $b$  表示出生率常数;  $d + \frac{\mu N(t)}{K}$  表示 Logistic 死亡率, 其中  $d$  表示自然死亡率,  $K$  表示环境容纳量,  $\mu = b - d$ ;  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) 表示接种比率,  $\tau$  表示接种周期, 且  $t, \tau$  的单位是一致的;  $\frac{\beta_i S_i(t)I(t)}{N(t)}$  ( $\beta_i > 0, i = 1, 2$ ) 表示标准传染率;  $m$  表示幼年转化为成年的转化率.

令  $x_i(t) = \frac{S_i(t)}{N(t)}$ , 这里  $i = 1, 2, y(t) = \frac{I(t)}{N(t)}$ ,  $z(t) = \frac{R(t)}{N(t)}$ , 则系统 (1) 可以化为下面的形式:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1'(t) &= b(1 - x_1(t)) - (\beta_1 - \alpha)y(t)x_1(t) - mx_1(t), \\ x_2'(t) &= mx_1(t) - (\beta_2 - \alpha)y(t)x_2(t) - bx_2(t), \\ y'(t) &= \beta_1 y(t)x_1(t) + \beta_2 y(t)x_2(t) + \alpha y^2(t) - (\alpha + b + \gamma)y(t), \\ z'(t) &= \gamma y(t) - (b - \alpha y(t))z(t), \\ N'(t) &= \left[\mu\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \alpha y(t)\right]N(t), \\ x_1(t^+) &= x_1(t) - \theta b, \\ x_2(t^+) &= x_2(t), \\ y(t^+) &= y(t), \\ z(t^+) &= z(t) + \theta b, \\ N(t^+) &= N(t). \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{array}{l} t \neq k\tau, \\ \\ \\ \\ \\ t = k\tau. \end{array} \right.$$

(2) 由于前三个方程独立于后面的两个方程, 故只需研究下列的子系统:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1'(t) &= b(1 - x_1(t)) - (\beta_1 - \alpha)y(t)x_1(t) - mx_1(t), \\ x_2'(t) &= mx_1(t) - (\beta_2 - \alpha)y(t)x_2(t) - bx_2(t), \\ y'(t) &= \beta_1 y(t)x_1(t) + \beta_2 y(t)x_2(t) + \alpha y^2(t) - (\alpha + b + \gamma)y(t), \\ x_1(t^+) &= x_1(t) - \theta b, \\ x_2(t^+) &= x_2(t), \\ y(t^+) &= y(t). \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{array}{l} t \neq k\tau, \\ \\ \\ t = k\tau. \end{array} \right.$$

从生物学的角度出发, 该系统的可行域为  $D = \{(x_1(t), x_2(t), y(t)) \in R^3 \mid x_1(t) \geq 0, x_2(t) \geq 0, y(t) \geq 0, x_1(t) + x_2(t) + y(t) \leq 1\}$ .

### 2 无病 $\tau$ 周期解

引理 1 考虑下面的脉冲微分系统:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1'(t) &= a - gv_1(t), \\ v_2'(t) &= cv_1(t) - hv_2(t), \\ v_1(t^+) &= v_1(t) - q, \\ v_2(t^+) &= v_2(t). \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{array}{l} t \neq k\tau, \\ \\ t = k\tau. \end{array} \right.$$

这里  $a, g, c, h > 0, 0 < q < 1$ , 则该系统有一个正  $\tau$  周期解:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= (a \exp(-gt) [gq - 1 + \exp(-gk\tau)(1 + \exp(gt)(1 - \exp(-(k+1)\tau)))] / (g(1 - \exp(-g(k+1)\tau))), \\ v_2(t) &= (ac [\exp(gt)(1 - \exp(-g(k+1)\tau)) - \exp(-g\tau) + gq + 1] / (g(h-g)(\exp(g(t+k\tau)) - \exp(g(t-\tau)))) + (ac(1 - \exp(-h(k+1)\tau)) [h \exp(h-g)t + g \exp(-hk\tau)(\exp(-h\tau) - 1) + g(1 - hq) + v_2'] / (gh(h-g)\exp(ht)(1 - \exp(-h(k+1)\tau)(1 - \exp(-g(k+1)\tau))) + (acgh(\exp(-g(k+1)\tau) - \exp(-h(k+1)\tau))) / (gh(h-g)\exp(ht)(1 - \exp(-h(k+1)\tau)(1 - \exp(-g(k+1)\tau))). \end{aligned}$$

其中

$$v_2 = \exp(-g(k+1)\tau)(h \exp(-(g-h)\tau) - g) + g \exp(-h(t-k\tau))(\exp(-g(k+1)\tau) - 1).$$

证明 令  $\Psi(t)$  为系统 (4) 对应齐次方程组的基解矩阵, 可以得到系统 (4) 的解的表达式

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \Psi(t) \begin{pmatrix} v_1(k\tau^+) \\ v_2(k\tau^+) \end{pmatrix} + \int_{k\tau}^t \Psi(s) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

从而得到系统 (4) 的解的解析式为:

$$v_1(t) = \exp(-gt) [v_1(k\tau^+) - \frac{a}{g}(1 - \exp(g(t - k\tau)))]$$

$k\tau))], k\tau < t \leq (k+1)\tau,$

$$v_2(t) = \frac{c}{h-g} \left[ \left( \frac{a}{g} \exp(g(t-k\tau)) + v_1(k\tau^+) \right) \exp(-bt) - \left( \frac{a}{h} \exp(h(t-k\tau)) + v_1(k\tau^+) \right) \exp(-ht) - \frac{1}{gh} (ah \exp(-gt) - ag \exp(-ht)) \right] + \exp(-ht)v_2(k\tau^+), k\tau < t \leq (k+1)\tau.$$

这里  $v_1(k\tau), v_2(k\tau)$  分别表示  $v_1, v_2$  在时间  $t = k\tau$  完成第  $k$  次脉冲免疫时的值. 利用系统表示脉冲的方程, 运用频闪映射, 得到:

$$v_1((k+1)\tau) = \exp(-g(k+1)\tau) [v_1(k\tau) - \frac{a}{g}(1 - \exp(g\tau))] - q = F(v_1(k\tau), v_2(k\tau)),$$

$$v_2((k+1)\tau) = \frac{c}{h-g} \left[ \left( \frac{a}{g} \exp(g\tau) + v_1(k\tau) \right) \exp(-g(k+1)\tau) - \left( \frac{a}{h} \exp(h\tau) + v_1(k\tau) \right) \exp(-h(k+1)\tau) - \frac{1}{gh} (ah \exp(-g(k+1)\tau) - ag \exp(-h(k+1)\tau)) \right] + \exp(-h(k+1)\tau)v_2(k\tau) = F(v_1(k\tau), v_2(k\tau)).$$

解此系统可以得到:

$$v_1^* = \frac{a}{g} \frac{gq + \exp(-gk\tau)(1 - \exp(-g\tau))}{1 - \exp(-g(k+1)\tau)},$$

$k\tau < t \leq (k+1)\tau.$

$$v_2^* = (ac(1 - \exp(-h(k+1)\tau))(h \exp(-gk\tau)(1 - \exp(-g\tau)) - g \exp(-hk\tau)(1 - \exp(-h\tau))) / (gh(h-g)(1 - \exp(-h(k+1)\tau))(1 - \exp(-g(k+1)\tau))) + (acghq(\exp(-g(k+1)\tau) - \exp(-h(k+1)\tau))) / (gh(h-g)(1 - \exp(-h(k+1)\tau))(1 - \exp(-g(k+1)\tau))), k\tau < t \leq (k+1)\tau.$$

从而得到系统(4)的  $\tau$  周期解为:

$$v_1(t) = (a \exp(-gt) [gq - 1 + \exp(-gk\tau)(1 + \exp(gt)(1 - \exp(-(k+1)\tau)))] / (g(1 - \exp(-g(k+1)\tau))),$$

$$v_2(t) = (ac [\exp(gt)(1 - \exp(-g(k+1)\tau)) - \exp(-g\tau) + gq + 1] / (g(h-g)(\exp(g(t+k\tau)) - \exp(g(t-\tau)))) + (ac [h \exp(h-g)t + g \exp(-hk\tau)(\exp(-h\tau) - 1) + g(1 - hq) + v_2^*] / (gh(h-g) \exp(ht)(1 - \exp(-g(k+1)\tau))) + (acgh(\exp(-g(k+1)\tau) - \exp(-h(k+1)\tau))) / (gh(h-g) \exp(ht)(1 - \exp(-h(k+1)\tau))(1 - \exp(-g(k+1)\tau))).$$

其中  $k\tau < t < (k+1)\tau, v_2^* = \exp(-g(k+1)\tau)$

$$1)\tau)(h \exp(-g(k+1)\tau) - g) + g \exp(-h(t-k\tau))(\exp(-g(k+1)\tau) - 1).$$

**引理 2<sup>[9]</sup> 脉冲系统**

$$\begin{cases} w'(t) = e - fw(t), t \neq k\tau, \\ w(t^+) = w(t) + B, t = k\tau. \end{cases} \quad (5)$$

存在唯一全局渐近稳定的  $\tau$  周期解

$$\overline{w(t)} = \frac{e}{f} + \frac{B}{1 - \exp(-f\tau)} \exp(-f(t-k\tau)),$$

$k\tau < t \leq (k+1)\tau.$

讨论系统(3)的无病  $\tau$  周期解的存在性, 必须满足

$$\begin{cases} x_1'(t) = -(b+m)x_1(t) + b, \\ x_2'(t) = mx_1(t) - bx_2(t), \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x_1'(t) = -(b+m)x_1(t) + b, \\ x_2'(t) = mx_1(t) - bx_2(t), \end{cases}} \right\} t \neq k\tau, \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_1(t^+) = x_1(t) - \theta, \\ x_2(t^+) = x_2(t). \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x_1(t^+) = x_1(t) - \theta, \\ x_2(t^+) = x_2(t). \end{cases}} \right\} t = k\tau.$$

利用引理 1, 系统(6)存在正  $\tau$  周期解  $(\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)})$ .

$$\overline{x_1(t)} = (b \exp(-(b+m)t) [\theta b(b+m) - 1 + \exp(-(b+m)k\tau)(1 + \exp((b+m)t)(1 - \exp(-(k+1)\tau)))] / ((b+m)(1 - \exp(-(b+m)(k+1)\tau))),$$

$$\overline{x_2(t)} = (b [\exp((b+m)t)(1 - \exp(-(b+m)(k+1)\tau)) - \exp(-(b+m)\tau) + \theta b(b+m) + 1] / (-(b+m)(\exp((b+m)(t+k\tau)) - \exp((b+m)(t-\tau)))) - (b \exp(-mt) + (b+m) \exp(-bk\tau)(\exp(-b\tau) - 1) + (b+m)(1 - \theta^2) + v_2^*) / ((b+m) \exp(bt)(1 - \exp(-(b+m)(k+1)\tau))) - (b(\exp(-(b+m)(k+1)\tau) - \exp(-b(k+1)\tau))) / (\exp(bt)(1 - \exp(-b(k+1)\tau))(1 - \exp(-(b+m)(k+1)\tau))).$$

其中  $k\tau < t < (k+1)\tau,$

$$v_2^* = \exp(-(b+m)(k+1)\tau)(b \exp(-m\tau) - (b+m) + (b+m) \exp(-b(t-k\tau))(\exp(-(b+m)(k+1)\tau) - 1)).$$

**定理 1** 当  $R' < 1$  时, 系统(3)的无病  $\tau$  周期解  $(x_1(t), x_2(t), 0)$  是局部渐近稳定的,

其中

$$R' = (\beta_1 \exp(-(b+m)\tau) [\theta b(b+m) - 1 + \exp(-(b+m)\tau)(1 + \exp((b+m)\tau)(1 - \exp(-\tau)))] / ((b+m)(1 - \exp(-(b+m)\tau))) - (\beta_2 [b \exp(-m\tau) + (b+m) \exp(-b\tau)(\exp(-b\tau) - 1) - (b+m)(1 - \theta^2) - v_2^*]) / (-mb^2(b+m) \exp(b\tau)(1 - \exp(-b\tau))(1 - \exp(-(b+m)\tau))))$$

$$m)\tau)) - (\beta_2[\exp((b+m)\tau) - \exp(-(b+m)\tau) + \theta b(b+m)] / ((b+m)(\exp((b+m)\tau) - 1)) - (\beta_2(\exp(-(b+m)\tau) - \exp(-b\tau)) / (\exp(b\tau)(1 - \exp(-b\tau)(1 - \exp(-(b+m)\tau))) + \frac{\alpha + \gamma}{b}.$$

**证明** 作变换

$$X_1(t) = x_1(t) - \overline{x_1(t)}, X_2(t) = x_2(t) - \overline{x_2(t)}, Y(t) = y(t).$$

当  $t \neq k\tau$  时, 系统(3) 关于无病  $\tau$  周期解  $(\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)}, 0)$  的线性化系统为下面的系统

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b+m) & 0 & -(\beta_1 - \alpha) \overline{x_1(t)} \\ m & -b & -(\beta_2 - \alpha) \overline{x_2(t)} \\ 0 & 0 & \beta_1 \overline{x_1(t)} + \beta_2 \overline{x_2(t)} - (\alpha + b + \gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ Y(t) \end{pmatrix},$$

当  $t = k\tau$  时, 脉冲条件变为

$$\begin{pmatrix} X_1(t^+) \\ X_2(t^+) \\ Y(t^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}.$$

令  $\Phi(t)$  是线性化系统的基解矩阵, 且  $\Phi(0) = E, E$  为单位矩阵. 容易解得

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \exp(-(b+m)t) & 0 & \frac{\alpha - \beta_1}{u(t) + m} \exp((u(t) - b)t) \\ -\exp(-(b+m)t) & \exp(-bt) & \Delta \\ 0 & 0 & \exp((u(t) - b)t) \end{pmatrix},$$

其中  $\Delta$  表示

$$\frac{(u(t) + m)(\alpha - \beta_2) \overline{x_2(t)} + m(\alpha - \beta_1)}{u(t)(u(t) + m)} \exp((u(t) - b)t); u(t) = \beta_1 \overline{x_1(t)} + \beta_2 \overline{x_2(t)} - \alpha - \gamma.$$

于是线性化系统的单值矩阵

$$M = \Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \exp(-(b+m)\tau) & 0 & \exp((u(\tau) - b)\tau) \\ -\exp(-(b+m)\tau) & \exp(-b\tau) & \# \\ 0 & 0 & \exp((u(\tau) - b)\tau) \end{pmatrix},$$

其中  $\#$  表示

$$\frac{(u(\tau) + m)(\alpha - \beta_2) \overline{x_2(\tau)} + m(\alpha - \beta_1)}{u(\tau)(u(\tau) + m)}.$$

$\exp((u(\tau) - b)\tau)$ , 矩阵的特征值为  $\lambda_1 = \exp(-(b+m)\tau) < 1, \lambda_2 = \exp(-b\tau) < 1, \lambda_3 = \exp((u(\tau) - b)\tau)$ . 由于  $R' < 1$ , 于是  $\lambda_3 < 1$ .

根据 Floquet 定理, 无病  $\tau$  周期解  $(\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)},$

0) 局部渐近稳定.

**定理 2** 当  $R_0 < 1$  时, 系统(3) 的无病  $\tau$  周期解  $(\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)}, 0)$  全局渐近稳定, 其中  $R_0 = ((b\beta_1 + m\beta_2)[b(1 - \exp(-(b+m)\tau)) - b(b+m)\theta \exp(-(b+m)\tau)] / (b(b+m)(b+\gamma)(1 - \exp(-(b+m)\tau)))$ .

**证明** (I) 从系统(3) 的第一个方程, 有

$$x_1'(t) \leq b - (b+m)x_1(t).$$

考虑下面的脉冲比较系统

$$\begin{cases} u_1'(t) = b - (b+m)u_1(t), t \neq k\tau, \\ u_1(t^+) = u_1(t) - b\theta, t = k\tau. \end{cases} \quad (7)$$

根据引理 2, 知道系统(7) 存在渐近稳定的  $\tau$  周期解

$$\overline{u_1(t)} = \overline{x_1(t)} = \frac{b}{b+m} - \frac{b\theta}{1 - \exp(-(b+m)\tau)} \cdot \exp(-(b+m)(t - k\tau)).$$

令  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  是系统(3) 的解,  $u_1(t)$  是系统(7) 的解, 利用比较原理, 存在  $k_1 \in Z^+$ , 使得

$$x_1(t) \leq u_1(t) < \overline{u_1(t)} + \varepsilon_1 = \frac{b}{b+m} - \frac{b\theta}{1 - \exp(-(b+m)\tau)} \exp(-(b+m)(t - k\tau)) + \varepsilon_1 < \delta_1. \quad (8)$$

其中  $\delta_1 = \frac{b}{b+m} - \frac{b\theta}{1 - \exp(-(b+m)\tau)} \exp(-(b+m)\tau) + \varepsilon_1, k\tau < t \leq (k+1)\tau, k > k_1$ .

(II) 由系统(3) 第二个方程及(8) 式, 有

$$x_2'(t) < m\delta_1 - bx_2(t).$$

考虑下面脉冲比较系统

$$\begin{cases} u_2'(t) = m\delta_1 - bu_2(t), t \neq k\tau, \\ u_2(t^+) = u_2(t), t = k\tau. \end{cases} \quad (9)$$

根据引理 2, 知道系统(9) 存在渐近稳定的  $\tau$  周期解

$$\overline{u_2(t)} = \frac{m\delta_1}{b}.$$

利用比较原理, 存在  $k_2 \in Z^+, k_2 > k_1$ , 使得

$$x_2(t) \leq u_2(t) < \overline{u_2(t)} + \varepsilon_1 = \frac{m\delta_1}{b} + \varepsilon_1 = \delta_2, k\tau < t \leq (k+1)\tau, k > k_2. \quad (10)$$

(III) 接下来, 从系统(3) 第三个方程有

$$y'(t) \leq (\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 - b - \gamma)y(t), t > k\tau, k > k_2.$$

考虑下列比较系统

$$u_3'(t) = (\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 - b - \gamma)u_3(t).$$

由于

$$\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 = \beta_1\delta_1 + \frac{m\beta_2}{b}\delta_1 = (\beta_1 + \frac{m\beta_2}{b})[\frac{b}{b+m} - \frac{b\theta}{1 - \exp(-(b+m)\tau)} \exp(-(b+m)\tau)]$$

$m)\tau] + \epsilon_1$ , 且  $\epsilon_1 > 0$  足够小, 所以

$$R_0 = \frac{\beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2}{b + \gamma} = ((b\beta_1 + m\beta_2)[b(1 -$$

$\exp(-(b+m)\tau) - b(b+m)\theta \exp(-(b+m)\tau)] / (b(b+m)(b+\gamma)(1 - \exp(-(b+m)\tau)))$ .

当  $R_0 < 1$  时,  $u_3'(t) < 0$ , 因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_3(t) = 0$ , 所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . 也就是, 对任意足够小的  $\epsilon > 0$ , 存在

$k_3 \in Z^+, k_3 > k_2$ , 使得对所有  $t > k_3\tau$ , 有  $y(t) < \epsilon$ .

对系统(3)的第一个方程, 有

$$x_1'(t) > b - [b + m + (\beta_1 - \alpha)\epsilon_2]x_1(t), t > k_3\tau.$$

考虑下面脉冲比较系统

$$\begin{cases} w_1'(t) = b - [b + m + (\beta_1 - \alpha)\epsilon_2]w_1(t), \\ t \neq k\tau, \\ w_1(t^+) = w_2(t) - \theta b, t = k\tau. \end{cases} \quad (11)$$

类似于(I)的讨论可以知道系统(11)有  $\tau$  周期解  $\overline{w_1(t)}$ , 使得

$$\overline{w_1'(t)} = b - [b + m + (\beta_1 - \alpha)\epsilon_2] \overline{w_1(t)}.$$

根据脉冲方程比较原理, 存在  $k_4 \in Z^+, k_4 > k_3$ , 使得

$$x_1(t) \geq w_1(t) > \overline{w_1(t)} - \epsilon_2 > \delta_3, k\tau < t \leq (k+1)\tau, k > k_4. \quad (12)$$

其中  $\delta_3 = \frac{b}{b + m + (\beta_1 - \alpha)\epsilon_2} -$

$$\frac{\theta b}{1 - \exp(-(b + m + (\beta_1 - \alpha)\epsilon_2)\tau) - \epsilon_2} \exp(-(b + m + (\beta_1 - \alpha)\epsilon_2)\tau) - \epsilon_2.$$

由系统(3)的第二个方程和(12)式, 有

$$x_2'(t) > m\delta_3 - [b + (\beta_2(t) - \alpha)\epsilon_2]x_2(t), t > k_4\tau.$$

同样的, 类似于(II)的讨论知道存在  $\tau$  周期解  $\overline{w_2(t)}$ , 使得  $\overline{w_2'(t)} = m\delta_3 - [b + (\beta_2(t) - \alpha)\epsilon_2] \overline{w_2(t)}$ .

根据脉冲微分方程比较原理, 存在  $k_5 \in Z^+, k_5 > k_4$ , 使得

$$x_2(t) \geq w_2(t) > \overline{w_2(t)} - \epsilon_2, k\tau < t \leq (k+1)\tau, k > k_5. \quad (13)$$

由于  $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$  任意小, 从而根据(8,10,12,13)式可以知道系统(3)的无病  $\tau$  周期解  $(\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)}, 0)$  是全局吸引的.

由定理1知道, 当  $R' < 1$  时, 系统(3)的无病  $\tau$  周期解  $(x_1(t), x_2(t), 0)$  局部渐近稳定, 而  $R' < R_0$ , 所以当  $R_0 < 1$  时, 系统(3)的无病  $\tau$  周期解  $(\overline{x_1(t)},$

$\overline{x_2(t)}, 0)$  全局渐近稳定.

### 3 数值模拟

给出两个数值模拟的例子来验证结论.

**例1** 在模型(3)中, 设  $b=0.3, \beta_1=0.8, \beta_2=0.4, \alpha=0.2, m=0.7, \gamma=0.45, \theta=0.5, \tau=1$ . 计算得,  $R_0=0.4983 < 1$ .

**例2** 在模型(3)中, 设  $b=0.3, \beta_1=0.6, \beta_2=0.3, \alpha=0.05, m=0.6, \gamma=0.5, \theta=0.6, \tau=1$ . 计算得,  $R_0=0.1918 < 1$ .

由定理2可以知道上述两个数值模拟例子的无病  $\tau$  周期解都是全局渐近稳定的.

图1(a)描述了当  $\tau=1$  时  $S_1(t), S_2(t), I(t)$  的时间序列, 通过观察可以看到, 当  $t$  从6到10时,  $I(t) \rightarrow 0, S_1(t), S_2(t)$  全局渐近稳定到一个  $\tau$  周期解. 同时图1(b)也描述了一个无病  $\tau$  周期解的全局渐近稳定, 只是这个  $\tau$  周期解达到全局渐近稳定所需要的时间  $t$  与图1(a)的不一样. 因此可以知道, 对于所建立的具有阶段结构的脉冲免疫接种 SIR 模型, 虽然相应的有效系数的数值不同, 但是只要满足  $R_0 < 1$ , 该系统都存在全局渐近稳定的无病  $\tau$  周期解. 从而定理2的可行性得到证实.

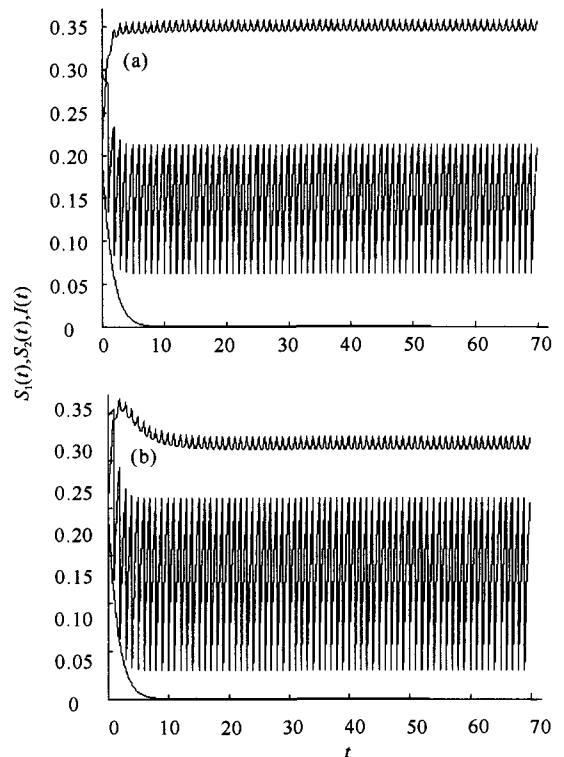


图1 无病  $\tau$  周期解的全局渐近稳定性 (a) 例1的结果, (b) 例2的结果.

(下转第302页)

由(14)式可以得出

$$ty_2' + (2+t)y_2 = tx_2'y_0' - (y_0 + y_0')x_2 - (y_0' + x_1)y_1 + (\frac{A}{t^2} - y_0)(y_1' - x_1'y_0'),$$

上式两边乘  $\frac{1}{ty_0}$  得

$$\frac{d}{dt}(\frac{y_2}{y_0}) = \frac{1}{t}[-(t+2)x_2' + \frac{2}{t}x_2 - (\frac{A}{t^2} - y_0)(\frac{y_1' - x_1'y_0'}{y_0})],$$

将  $x_1, y_0$  及  $y_1$  代入上式,使用 Taylor 展开式,通过繁琐的计算,最后得到  $y_2$  中包含最坏的奇异性项为

$$-2x_2' + \frac{2}{t}x_2 + \frac{4A^2}{3t^5}.$$

为消去  $y_2$  中最坏的奇异性,令  $-x_2' + \frac{1}{t}x_2 + \frac{2A^2}{3t^5} = 0$ ,解之得到伸缩函数

$$x_2 = -\frac{2A^2}{15t^4}.$$

从而得到方程(1)的近似展开式

$$y = Ae^{-t}t^{-2} \{1 + A\epsilon [\frac{2}{3t^3} + \frac{1}{3t^2} - \int_t^1 e^{-s} (\frac{2}{s^4} +$$

$$\frac{1}{s^3})ds]\} + O(\frac{\epsilon^2}{t^6}),$$

其中  $t$  满足方程

$$x = t - \frac{\epsilon A}{3t^2} - \frac{2\epsilon^2 A^2}{15t^4} + o(\frac{\epsilon^3}{t^6}).$$

参考文献:

- [1] Nayfeh A H. 摄动方法[M]. 上海:上海科学技术出版社,1984.
- [2] 包玉兰,董贵兴.用摄动法求解非线性微分方程[J].内蒙古民族师院学报:自然科学版,1996(1):12-14.
- [3] 潘祖梁.非线性问题的数学方法及其应用[M].浙江:浙江大学出版社,1998.
- [4] 刘日成.奇异摄动问题中的若干方法[D].长春:吉林大学,2007.
- [5] 钱伟长.关于非线性科学[J].自然杂志,1995(1):7-9.
- [6] 徐钧涛.奇异摄动理论研究在华东师范大学的发展[J].华东师范大学学报:自然科学版,2006(1):31-34.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 298 页)

参考文献:

- [1] 马知恩,周义仓,王稳地,等.传染病动力学的数学建模与研究[M].北京:科学出版社,2004.
- [2] Stone L, Shulgn B, Agur Z. Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model [J]. Math Comput Model, 2000, 31(4-5): 207-215.
- [3] 赵文才,孟新柱.一类具有 Logistic 死亡率的脉冲疫苗接种 SIRS 传染病模型[J].吉林大学学报,2009, 47(6): 1165-1171.
- [4] Li X, Wang W. A discrete epidemic model with stage-structure[J]. Chaos Solitons and Tals, 2005, 26: 947-958.
- [5] Wang W, Chen L. A predator-prey system with stage structure for predator[J]. Comput Math Apply, 1997, 33: 83-9.
- [6] 霍海峰,张良,苗黎明.周期捕食-食饵模型的持续生存和正周期[J].兰州理工大学学报,2007, 33(5): 132-135.
- [7] Charlesworth B. Evolution in age-structured populations[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University press, 1994.
- [8] Cushing J M. An introduction to structured population dynamics[M]. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [9] 张小兵,霍海峰.一类具有阶段结构和脉冲免疫的 SIR 传染病模型[J].兰州理工大学学报,2010, 36(1): 152-157.

(责任编辑:陈小玲)