双种群进化策略解奇异非线性方程组*

Solving Singular Nolinear Groups Based on Bi-group Evolution Strategies

郭德龙[1],夏慧明[2],周永权[3]
GUO De-long[1],XIA Hui-ming[2],ZHOU Yong-quan[3]

(1.黔南民族师范学院数学系,贵州都匀 558000;2.南京师范大学泰州学院数学系,江苏泰州 225300;3.广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)
(1. Department of Maths Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun, Guizhou, 558000, China; 2. Department of Maths Taizhou College of Nanjing Normal University, Taizhou, Jiangsu, 225300, China; 3. College of Maths and Computer Science Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:鉴于传统优化算法在求解奇异非线性方程组中存在受初值选取是否合适的影响、收敛速度慢且容易陷入局部最优解等缺点,提出一种改进双种群进化策略求解奇异非线性方程组算法.首先把奇异非线性方程组转化为无约束优化问题,再求解无约束优化.该算法克服了传统算法不足,避免了大量的求导计算,算法收敛速度快、求解精度高、稳定性强.

关键词:非线性方程组 进化策略 双突变
中图法分类号:O224,TP181 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2011)04-0303-03

Abstract: There are several problems in traditional optimization algorithm in solving singular nonlinear equations such as the effect of the appropriate selection of initial value, slow convergence and easily falling into local optimal solution. In this paper, an improved Bi-group evolution strategies is proposed to solve the singular nonlinear equations. The algorithm singular nonlinear equations for unconstrained optimization problems are used to solve unconstrained optimization. The simulation results indicates that the algorithm overcome the problems of traditional algorithm, is insufficient to avoid a large number of derivative calculation, and is fast convergence, high accuracy and high stability.

Key words: nonlinear equations, evolution strategies, double mutant

奇异非线性方程组在工程设计、最优控制中经常遇到,其数学模型如下:对于非线性方程组

$$F(x)=0, x\in R^n, \tag{1}$$

存在着某些点 $x^*\in R^n$,使得 $\mathrm{rank}[F'(x^*)]<n$. 这表明代表函数导数的Jacobi矩阵亏秩,也就是 $F(x)$ 的 Frechet 导数 $F'(x)$ 不可逆,因此在迭代过程中存在奇异点,不能应用传统的 Newton 迭代法求解.虽然该模型提出已久,但是对其求解的研究并不多. Rall 等对此作出了较为系统而又有开创性的工作,解决了 $F'(x)$ 不可逆问题,提出了 Newton 方法在 Banach 空间上的收敛性定理,还提出过数值延拓法.但是,现行大多数的方法还是需要计算 Jacobi 矩阵,并且每次迭代过程中还需要计算修正后的 $F'(x)$ 的逆.算法复杂,计算量大并且多数局部收敛,使用价值不大.进化策略(ES)是一类模仿自然进化原理以求解参数优化问题的算法.本文参照文献[1]提出一种基于删除策略的双种群进化策略,并用该策略求解奇异非线性方程组.数值实验表明

收稿日期:2011-09-14
作者简介:郭德龙(1976-),男,硕士,讲师,主要从事神经网络、进化计算及应用的研究。
*国家民委科研基金项目(08GX01),广西自然科学基金项目(0832082),贵州省教育厅科研项目(黔教科 2010093),黔南民族师范学院院级科研项目(QNSY0905)资助。

该算法具有很好的全局收敛性，能解决奇异非线性方程组的求解问题.

1　改进的双种群进化策略[2]

进化策略的突变是在旧个体基础上添加一个随机量，从而形成新个体.其中高斯突变算子为

$$\begin{cases}\sigma_i' = \sigma_i \cdot \exp\left(r' \cdot N(0,1) + r \cdot N_i(0,1)\right), \\ x_i' = x_i + \sigma_i \cdot N_i(0,1).\end{cases} \tag{2}$$

式中 (x_i, σ_i) 是父代个体的第 i 个分量；(x_i', σ_i') 是子代新个体的第 i 个分量；$N(0,1)$ 是服从标准正态分布的随机数；$N_i(0,1)$ 是针对第 i 个分量重新产生一次符合标准正态分布的随机数；r' 是全局系数，常取 1；r 是局部系数，常取 1.

柯西分布和高斯分布有一定的相似性，而且柯西分布具有较高的两翼概率特性，即柯西分布有一条很长的尾巴，所以，柯西分布容易产生一个远离原点的随机数，比高斯突变产生的随机数具有更宽的分布范围.如果用柯西突变替换原来进化策略中的高斯突变来产生后代，就意味着利用柯西突变有可能很快跳出局部极小的区域.柯西突变算子为

$$\begin{cases}\sigma_i' = \sigma_i \cdot \exp(r_i' \cdot N(0,1) + r \cdot N_i(0,1)), \\ x' = x_i + \sigma_i \cdot \eta_i.\end{cases} \tag{3}$$

式中：参数 η_i 是 $t=1$ 的一个柯西分布的随机变量比例参数，用于更新每一个分量；其他参数同式(2)式.这种突变方式中，由于 η_i 是一个柯西分布的随机变量，比高斯分布产生的随机变量的范围大，因而对目标变量的修改量也大.

改进双群进化策略的进化在两个不同的子群间并行进行，其中一个子群使用删除策略不断淘汰和更新个体以实现在变量空间中足够分散的探索.又因为柯西分布函数具有较长的两翼分布的特性，使得它很容易跳出局部极小点，但是它的较小的中央部分却是它的一个弱点，使得它在进行更精确的局部搜索方面的性能降低.所以另一个子群在一定代数之前先使用柯西突变算子以实现子群在尽可能大的空间搜索，经过一定代数后使用指数递减的高斯突变算子来实现子群在局部空间尽可能的细致搜索，通过种群重组实现子群间的个体与信息交流.

2　基于双种群进化策略解奇异非线性方程组

2.1　问题的转化

把方程组(1)写成分量的形式

$$\begin{cases}f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0.\end{cases} \tag{4}$$

式中，x_i 为所要求解的 n 个未知变量，f_i 为定义在 m 维欧氏空间中的实值函数.将问题(4)转化为优化问题

$$\min_{x\in R^n} \| F(x) \|_2. \tag{5}$$

定理 1[3]　非线性方程组 $F(x)=0$ 的解与 $\| F(x) \|_2$ 的全局极小点是等价的.

证明　充分性.假设 x^* 是方程组 $F(x)=0$ 的解，则 $\| F(x) \|_2 = 0$.根据范数的非负性，必有 $\| F(x) \|_2 \geqslant 0$，所以 x^* 是 $\| F(x) \|_2$ 的全局极小值点.

必要性.假设 x^* 是 $\| F(x) \|_2$ 的全局极小值点，由于 $F(x)$ 写成分量形式是一个列向量 $F(x) = [f_1, f_2, \cdots, f_m]^{\mathrm{T}}$，而在方程组有解的情况下 $\| F(x) \|_2 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_m^2}$ 的全局极小值点，显然满足各个分量均为零，$f_i(x^*)=0(i=1,2,\cdots,m)$，则 x^* 为 $F(x)=0$ 的解.

这样通过定理 1 将奇异非线性方程组(1)转化为无约束优化问题(5).

2.2　求解奇异非线性方程组的方法

设方程组是 m 个方程 n 个未知量的方程组：

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0.\end{cases} \tag{6}$$

那么

(1) 确定个体的表达方式：表达式中个体由目标变量 X 和标准差 σ 两部分组成，每部分有 n 个分量，即

$(X,\sigma)=((x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n),(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i,\cdots,\sigma_n))$，

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表非线性方程组的 n 个未知量.

(2) 随机生成初始群体，在问题的可行解空间中随机产生 N(N 为偶数) 个个体作为初始种群，将

整个种群随机划分为两个子群,其中一个子群使用删除策略,称之为子群 X,另外一个子群使用柯西突变算子和高斯突变算子,称之为子群 Y. 每个个体 (X,σ) 内包含 n 个 x_i,σ_i,分量,产生初始个体的方法是随机生成.

(3) 计算适应度(5) 式,以平方和的算术根作为适应度. 终止条件选择一个接近 0 值的 ε,当最小适应度小于 e 时终止.

(4) 如果满足条件,终止,选出最优解. 否则,继续往下进行.

(5) 删除种群 X 中的所有个体,随机均匀产生 $N/2$ 个个体,并计算适应度. 对于种群 Y 中的个体根据进化策略,用下述操作产生新群体:1) 重组. 将两个父代个体交换目标变量和随机因子,产生新个体. 目标变量采用离散重组,随机因子采用中值重组. 2) 突变. 采用柯西突变算子,产生新个体. 3) 计算新个体适应度. 4) 选择. 采用 (μ,λ) 选择策略,选优良的 $N/2$ 个体组成下一代群体.

(6) 在新子群 X 和新子群 Y 组成的种群中,使用随机 q 竞争法则,选取排在前 $N/2$ 的个体组成子群 Y,排在后 $N/2$ 的个体组成子群 X. 在这个种群的重组过程中并未显式地给出个体具体从某个子群迁移到另外的一个子群,也未给出信息交换的具体方式,但是在这个种群重组的过程中,必然有某些本来不属于本子群的个体在重组时进入本子群,而且这些个体的转移以适应度为依据,因此个体的移动也导致包含个体适应度信息的流动.

(7) 反复执行(4),(5),(6),直到达到终止条件,选择最佳个体作为进化策略的结果. 如果到一定代数后还没满足要求,往下的过程可采用局部微调的方法,使其进行更精确的局部搜索.

(8) 到一定代数后还没达到满意解,对于 X 种群还是采用删除策略,对于 y 种群采用下面的方法进化产生新的种群:1) 重组. 目标变量采用离散重组,随机因子采用中值重组. 2) 突变. 采用高斯突变算子,产生新个体. 3) 计算新个体适应度. 4) 选择. 采用 (μ,λ) 选择策略,挑选优良的 $N/2$ 个体组成下一代群体.

(9) 反复执行(4),(8),(6),直到达到终止条件,选择最佳个体作为进化策略的结果.

3 数值模拟

例 1[4] 求解奇异非线性方程组

$$\begin{cases}6x_1^5+9x_1^2x_2^2-6x_1x_2^3+2x_2^3-30x_1=-19,\\ 3x_1^3+9x_1^2x_2^2-9x_1+4x_2^3-21x_2=-14.\end{cases}$$

得精确解 $x^*=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 或 $x^*=(0.691,0.489)$. 传统的 ABS 算法中必须选择合适的初始值(0.85, 0.85). 这里 $\mu=15,\lambda=100,\varepsilon=0.9999996$.

例 2[4] 求解奇异非线性方程组

$$\begin{cases}x_1^3+x_1^2x_2^2x_3+x_1x_2x_3^3+2x_2=3,\\ x_1^5x_2^4+x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3+3x_1=4,\\ x_3^5+x_1^2x_2^2+x_1x_3+3x_1=4.\end{cases}$$

得精确解 $x^*=(1,1,0)$. 传统的 ABS 算法中必须选择合适的初始值(0.85, 0.85, 0.15). 这里 $\mu=20,\lambda=140,\varepsilon=0.9999995$.

从表 1、表 2 可以看到,双种群进化策略算法可以把所有解求出来. 这比传统的 ABS 算法优越. 进化策略算法不但初始点可以随机的选取,即使在全部随机选取初始值的条件下求解速度也比 PSO 算法快,而且精度高,有效地避免了初始点选择困难的问题.

表 1 双种群进化策略算法与其它算法比较(例 1)

算法	收敛情况	收敛解	迭代次数	初始值
ABS 算法[4]	收敛	(0.999995, 1.000009)	6	(0.85, 0.85)
PSO 算法[2]	收敛	(0.999926, 1.000945)或(0.690592, 0.488844)	135	随机给出
进化策略算法	收敛	(0.999946, 1.000347)或(0.690789, 0.488879)	107	随机生成初值解向量

表 2 双种群进化策略算法与其它算法比较(例 2)

算法	收敛情况	收敛解	迭代次数	初始值
ABS 算法[4]	收敛	(1.000001, 0.999999, 0.000008)	8	(0.85, 0.85, 0.15)
PSO 算法[2]	收敛	(0.999999627, 1.000000650, 0.000000134)	127	随机给出
进化策略算法	收敛	(0.999999736, 1.000000473, 0.000000126)	115	随机生成初值解向量

4 结束语

本文利用双种群进化策略来求解奇异非线性方程组,充分发挥了算法的全局收敛性、并行性和群体搜索能力,有效地解决了传统方法求解奇异非线性方程组选取初始点限制问题. 数值计算表明,双种群进化策略算法具有较高的收敛速度和精度,对于奇

(下转第 310 页)

由推论5，不妨设与 Hg_1 相交的左陪集个数为 t_1 个，则与 $g_1'H$ 相交的右陪集个数也为 t_1 个. 又由推论6和推论7，不妨令

$Hg_1 \cup Hg_2 \cup \cdots \cup Hg_{t_1} = g_1'H \cup g_2'H \cup \cdots \cup g_{t_1}'H = Hg_1H.$

此时，取 $x_i \in Hg_i \cap g_i'H(1 \leqslant i \leqslant t_1)$，则必有 $\bigcup_{i=1}^{t_1} Hx_i = \bigcup_{i=1}^{t_1} x_iH.$

同理可找出集合 X. 特别地，若 H 是群 G 的正规子群，则对于定理3还有 $Hx_i = x_iH, 1 \leqslant i \leqslant t.$

参考文献：

[1] 张远达. 有限群构造(下册)[M]. 北京：科学出版社，1982.

[2] 杨子胥. 近世代数[M]. 第2版. 北京：高等教育出版社，2003.

(责任编辑：尹 闯)

(上接第305页)

异非线性方程组求解问题具有良好的适应性，特别是一些很难求解的超越方程，利用双种群进化策略求解更具意义.

参考文献：

[1] 王向军，向东，蒋涛，等. 一种双种群进化规划算法[J]. 计算机学报，2006，29(5)：835-840.

[2] 云庆夏. 进化算法[M]. 北京：冶金工业出版社，2000.

[3] 孙明杰，陈月霞，胡倩. 求解奇异非线性方程组的粒子群优化算法[J]. 黑龙江科技学院学报，2006，16(6)：369-373.

[4] 葛仁东，E·斯帕笛卡托，夏尊铨. 一种修正的求解一类奇异非线性方程组的ABS算法[J]. 大连理工大学学报，2003，43(6)：704-710.

[5] 吴国桢，王金华. 关于奇异非线性方程组的Newton法的收敛性[J]. 浙江大学学报：理学版，2008，35(1)：27-31.

(责任编辑：尹 闯)