广西科学院学报 2012,28(2):98～101
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 28, No. 2 May 2012

四边形网格上变系数抛物型方程有限体积元法的 L^2 模误差估计*

L^2 Error Estimates of the Finite Volume Element Methods for Parabolic Equations with Variable Coefficients on Quadrilateral Meshes

刘 胜，阳 莺**
LIU Sheng, YANG Ying

（桂林电子科技大学数学与计算科学学院，广西桂林 541004）
(Department of Computational Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要：在 h^2 拟平行四边形条件下，给出变系数抛物型方程一个半离散和两个全离散有限体积元格式的 L^2 模最佳收敛阶误差估计.

关键词：抛物型方程 误差估计 四边形网格 有限体积元法
中图法分类号：O241.82 **文献标识码**：A **文章编号**：1002-7378(2012)02-0098-04

Abstract: The volume element methods for a kind of parabolic equations with variable coefficients on quadrilateral networks are proposed. The L^2 norms best convergence order error estimates for both a semi-discrete and two full-discrete finite volume element schemes for parabolic equations with variable coefficients are presented on h^2 quasi-parallel quadrilateral elements.

Key words: parabolic equations, error estimate, quadrilateral mesh, finite volume element method

有限体积元法也称广义差分法，可以看成是一种广义 Galerkin 法，该方法由李荣华教授在求解椭圆边值问题时首先提出[1]. 这类方法介于有限元法和有限差分法之间，是求解偏微分方程的一种方法，与其他数值计算方法相比，有限体积元法得到的离散方程能更好地保持原微分方程的守恒性，各项物理意义明确，而且方程形式规范. 关于四边形网格上的有限体积元法报道很多，文献[2]在 h^2-拟平行四边形条件下给出了椭圆方程解的 H^1 模误差估计. 文献[3]在与文献[2]同样条件下讨论椭圆方程解的 L^2 模误差估计. 文献[4,5]分别讨论了抛物型方程在 h^3-拟平行四边形条件下半离散和全离散有限体积元格式下解的 H^1 模和 L^2 模误差估计. 由于 h^3-拟平行四边形条件限制过强，文献[6]将该条件减弱为 h^2-拟平行四边形条件，并在此条件下得到抛物型方程半离散和全离散格式下解的 L^2 模误差估计，但该文未考虑到变系数抛物型问题. 本文在 h^2-拟平行四边形条件下，基于变系数抛物型方程半离散和两个全离散有限体积元格式，考虑变系数抛物型方程有限体积元法，并给出 L^2 模最佳收敛阶误差估计.

收稿日期：2011-11-23
修回日期：2012-02-10
作者简介：刘 胜(1982-)，男，硕士研究生，主要从事偏微分方程的有限体积法研究。
*国家自然科学基金项目(11001062)和广西教育厅基金项目(201012MS094)资助。
**通讯作者：阳 莺(1976-)，女，副教授，主要从事偏微分方程数值解研究。E-mail:yyang@guet.edu.cn。

1 网格剖分条件及相关引理

考虑如下抛物型方程的初边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot(A\nabla u)=f(x,y,t),(x,y)\in\Omega,\\ \quad t\in(0,T],\\ u(x,y,0)=u_0(x,y),(x,y)\in\Omega,t=0,\\ u|_{\Gamma=\partial\Omega}=0,(x,y)\in\Gamma,t\in(0,T].\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset R^2$ 为凸多边形区域，Γ 为其光滑边界，f 是 $\Omega\times[0,T]$ 的已知函数，另外 u_0 同样为 Ω 区域上的函数.

(1.1)式相应的变分形式为：求 $u=u(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)(0\leqslant t\leqslant T)$ 使得

$$\begin{cases}(\dfrac{\partial u}{\partial t},v)+a(u,v)=(f,v),\forall v\in H_0^1(\Omega),\\ \quad t\in(0,T],\\ u(x,y,0)=u_0(x,y),(x,y)\in\Omega.\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $a(u,v)=\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (1.2)式的解称为(1.1)式的广义解.

记 Ω 为凸多边形区域，边界 $\partial\Omega$ 为封闭折线，对此区域作凸四边形剖分并记为 T_h，该四边形单元的最大长度为 h，$\bar{\Omega}_h$ 为节点集合，$\dot{\Omega}_h=\bar{\Omega}_h\backslash\partial\Omega$ 为内节点集合，其中四边形单元的平均中心为各边中点连线的交点. 如图 1 所示，Q_0 为凸多边形内节点，

$\square Q_0Q_1Q_{12}Q_2$，$\square Q_0Q_2Q_{23}Q_3$，$\square Q_0Q_3Q_{34}Q_4$，$\square Q_0Q_4Q_{14}Q_1$

是以 Q_0 为公共节点的四边形，$C_i(i=1,2,3,4)$ 分别是它们的平均中心，C_i 节点集合用 Ω_h^* 表示，K_C 表示以 C 为中心的四边形单元，S_C 表示四边形单元 K_C 的面积. 假设 $M_i(i=1,2,3,4)$ 分别为线段 $\overline{Q_0Q_i}(i=1,2,3,4)$ 的中点，以 Q_0 为中心依次连接 $M_1,C_1,M_2,C_2,M_3,C_3,M_4,C_4$ 形成多边形区域并记为 K_Q^*，称之为对偶单元，S_Q^* 表示其对偶单元面积，相应的对偶单元构成的集合记为对偶剖分 T_h^*.

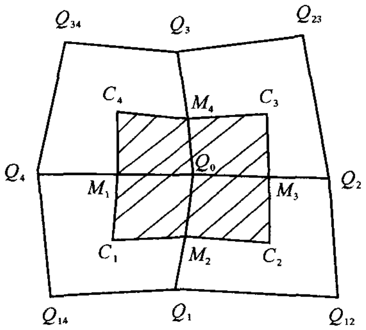

图 1　对偶单元

假设原始剖分 T_h 和对偶剖分 T_h^* 是拟均匀的，即存在正常数 C_1,C_2,C_3 且与剖分参数 h 无关的，满足以下不等式

$$C_1h^2\leqslant S_c\leqslant h^2,\forall C\in\Omega_h^*,\tag{1.3}$$

$$C_2\leqslant S_q^*\leqslant C_3h^2,\forall Q\in\overline{\Omega_h}.\tag{1.4}$$

再设四边形单元 $K_Q=\square P_1P_2P_3P_4$ 满足 h^2-拟平行四边形条件[3]，其中 R 点为四边形对角线的交点，各边的中点分别是 $M_i(i=1,2,3,4)$ (图 2)，即

$$|\overrightarrow{p_1p_2}+\overrightarrow{p_3p_4}|\leqslant Ch^2,\tag{1.5}$$

等价于

$$k_1-\frac{1}{2}=O(h),k_2-\frac{1}{2}=O(h).\tag{1.6}$$

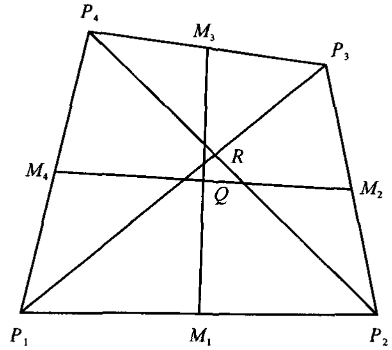

图 2　四边形网格单元

设试探函数空间 U_h 为双线性函数空间，检验函数空间 V_h 为分片常数函数空间，Π_h^* 是试探函数空间到检验函数空间的插值投影算子. 其中问题(1.1)式中的半离散有限体积元格式，全离散向后 Euler 有限体积元格式和全离散 Crank-Nicolson 有限体积元格式可参见文献[5].

对于二阶变系数椭圆型方程的边值问题

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(A\nabla u)=f,(x,y)\in\Omega,\\ u|_{\Gamma=\partial\Omega}=0,(x,y)\in\Gamma.\end{cases}\tag{1.7}$$

其中 $\Omega\subset R^2$ 是一有界凸多边形区域，Γ 为该区域边界，$A=(a_{i,j}(x,y)_{2\times2})\in W^{1,\infty}$ 且满足椭圆性条件，其相应的有限体积元格式为

$$a(u_h,v_h)=(f,v_h),\forall v_h\in V_h.\tag{1.8}$$

引理 1.1[3]　对于四边形剖分 T_h，$u\in H_0^1(\Omega)\cap H^3(\Omega)$ 和 $u_h\in U_h$ 分别是(1.7)式和(1.8)式的解，则

$$\|u-u_h\|_0\leqslant Ch^2\|u\|_3.\tag{1.9}$$

2　L^2 模最佳收敛阶误差估计

假设下列各式中的四边形单元均符合条件(1.7)，(1.8)及(1.9).

2.1　半离散格式的 L^2 误差估计

定理 2.1　令 u 和 u_h 分别是问题(1.2)和(1.1)

中的半离散有限体积元格式的解，则有 L^2 误差估计

$$\|u-u_h\|\leqslant C\{\|u-u_{0h}\|_0+ h^{\frac{1}{2}}\|u-u_{0h}\|_1+h^{\frac{3}{2}}\|u-u_{0h}\|_1+ h^{\frac{3}{2}}|u_0|_2+h^2[\|u_0\|_3+\int_0^t\|u_0\|_3\mathrm{d}t]\}. \quad (2.1)$$

证明 令 $u-u_h=\rho+\delta$，其中 $\rho=u-P_hu$，$\delta=P_hu-u_h$. 由椭圆投影算子定义有

$$\|\rho\|_0\leqslant Ch^2\|u\|_3\leqslant Ch^2(\int_0^t\|u_t\|_3\mathrm{d}t+\|u_0\|_3). \quad (2.2)$$

故只需估计 $\|\delta\|_0$.

(1.1)式的半离散有限体积元格式与(1.2)式相减可得

$$a(u-u_h,v_h)+(u_t-u_{h,t},v_h)=0,\forall v_h\in V_h. \quad (2.3)$$

再由椭圆投影算子定义得

$$a(\delta,v_h)+[(\delta_t,v_h)+(\rho_t,v_h)]=0,\forall v_h\in V_h. \quad (2.4)$$

令(2.4)式中 $v_h=\Pi_h^*\delta_t$，则

$$\|\delta_t\|_{0,h}^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(\delta,\Pi_h^*\delta)=-(\rho_t,\Pi_h^*\delta_t)+\frac{1}{2}[a(\delta_t,\Pi_h^*\delta)-a(\delta,\Pi_h^*\delta_t)]. \quad (2.5)$$

由文献[4]以及有限元空间的逆性质有

$$|a(\delta_t,\Pi_h^*\delta)-a(\delta,\Pi_h^*\delta_t)|\leqslant Ch\|\delta\|_1\|\delta_t\|_1\leqslant C\|\delta\|_1\|\delta_t\|_0. \quad (2.6)$$

由文献[5]及 ε-Cauchy 不等式有

$$|(\rho_t,\Pi_h^*\delta_t)|\leqslant C\|\rho_t\|_0\|\Pi_h^*\delta_t\|_0\leqslant C(\|\rho_t\|_0^2+\|\Pi_h^*\delta_t\|_0^2). \quad (2.7)$$

于是

$$\|\delta_t\|_{0,h}^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(\delta,\Pi_h^*\delta)\leqslant C(\|\rho_t\|_0^2+\|\delta\|_1^2). \quad (2.8)$$

(2.8)式两边对 t 求积分并利用 Gronwall 不等式可得

$$\int_0^t\|\delta_t\|_{0,h}^2\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^t\|\rho_t\|_0^2\mathrm{d}t+C\|\delta(0)\|_1^2. \quad (2.9)$$

在(2.4)式中取 $v_h=\Pi_h^*\delta$，即

$$\frac{1}{2}\|\delta_t\|_{0,h}^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(\delta,\Pi_h^*\delta)=-(\rho_t,\Pi_h^*\delta_t)+\frac{1}{2}[a(\delta,\Pi_h^*\delta_t)-a(\delta_t,\Pi_h^*\delta)]. \quad (2.10)$$

由文献[6]，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\delta_t\|_{0,h}^2\leqslant Ch\|\delta\|_{0,h}\|\delta_t\|_{0,h}+C(\|\rho_t\|_0^2+\|\delta\|_{0,h}^2).$$

再利用 ε-Cauchy 不等式，上式两边对 t 求积分且由 Gronwall 不等式可得

$$\|\delta(t)\|_{0,h}^2\leqslant C\|\delta(0)\|_0^2+Ch\int_0^t\|\delta_t\|_{0,h}^2\mathrm{d}t+C\int_0^t\|\rho_t\|_0^2\mathrm{d}t. \quad (2.11)$$

将(2.9)式代入(2.11)式右端得

$$\|\delta(t)\|_{0,h}^2\leqslant C\|\delta(0)\|_0^2+Ch\|\delta(0)\|_1^2\mathrm{d}t+C\int_0^t\|\rho_t\|_0^2\mathrm{d}t. \quad (2.12)$$

即

$$\|\delta(t)\|_{0,h}\leqslant C\|\delta(0)\|_0+C\int_0^t\|\rho_t\|_0\mathrm{d}t+Ch^{\frac{1}{2}}\|\delta(0)\|_1. \quad (2.13)$$

由椭圆投影算子的性质有

$$\|\rho_t\|_0\leqslant\|P_hu_t-u_t\|_0\leqslant Ch^2\|u_t\|_3, \quad (2.14)$$

$$\|\delta(0)\|_0\leqslant\|P_hu_0-u_0\|_0+\|u_0-u_{0h}\|_0\leqslant Ch^2\|u_0\|_3+\|u_0-u_{0h}\|_0, \quad (2.15)$$

$$\|\delta(0)\|_1\leqslant\|P_hu_0-u_0\|_1+\|u_0-u_{0h}\|_1\leqslant Ch|u_0|_2+\|u_0-u_{0h}\|_1. \quad (2.16)$$

联立(2.2)式和(2.13)～(2.16)式的结果，则定理2.1得证.

2.2 全离散格式的 L^2 误差估计

定理 2.2 令 u 和$\{u_h\}$分别是问题(1.2)式和(1.1)式中的后 Euler 有限体积元格式的解，则有 L^2 误差估计

$$\|u(t_n)-u_h^n\|_0\leqslant C\{\|u_0-u_{0h}\|_0+h^2[\|u_0\|_3+\int_0^{t_n}\|u_t\|_3\mathrm{d}t]+\tau\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|_0\mathrm{d}t\},n=0,1,2,\cdots,M. \quad (2.17)$$

证明 令 $u(t_n)-u_h^n=\delta^n+\rho^n$，其中 $\rho^n=u(t_n)-P_hu(t_n)$，$\delta^n=P_hu(t_n)-u_h^n$. 由椭圆投影算子定义有

$$\|\rho^n\|_0\leqslant Ch^2\|u(t_n)\|_3\leqslant Ch^2(\int_0^{t_n}\|u_t\|_3\mathrm{d}t+\|u_0\|_3). \quad (2.18)$$

下面估计 $\|\delta\|_0$.

令(1.2)式中 $t=t_n$，再与(1.1)式的向后 Euler 有限体积元格式相减可得

$$(u_t(t_n)-\bar{\partial}_tu_h^n,v_h)+a(\delta^n+\rho^n,v_h)=0,\forall v_h\in V_h. \quad (2.19)$$

令(2.19)式中 $v_h=\Pi_h^*\bar{\partial}_t\delta^n$，且由椭圆投影算子定义得

$$(\bar{\partial}_t\delta^n,\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n)+a(\delta^n,\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n)=$$

$$(\bar{\partial}_tP_hu(t_n)-u_t(t_n),\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n).\qquad(2.20)$$

并记 $r^n=\bar{\partial}_tP_hu(t_n)-u_t(t_n)$，于是

$$(\bar{\partial}_t\delta^n,\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n)+a(\delta^n,\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n)=(r^n,\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n).\qquad(2.21)$$

而由文献[5]可知

$$(\bar{\partial}_t\delta^n,\Pi_h^*\bar{\partial}_t\delta^n)=\|\bar{\partial}_t\delta^n\|_{0,h}^2.\qquad(2.22)$$

由文献[4]可知

$$a(\delta^n,\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n)\geqslant 0.\qquad(2.23)$$

由 Schwarz 不等式得

$$|(r^n,\Pi_h^*\ \bar{\partial}_t\delta^n)|\leqslant\|r^n\|_{0,h}\ \|\Pi_h^*\bar{\partial}_t\delta^n\|_{0,h}.\qquad(2.24)$$

从而再由文献[5]可得

$$\|\bar{\partial}_t\delta^n\|_{0,h}\leqslant C(\|r^n\|_{0,h}).\qquad(2.25)$$

由全离散格式差商 $\bar{\partial}_tu_h^n=(u_h^n-u_h^{n-1})/\tau$，得到

$$\|\delta^n\|_{0,h}\leqslant C(\|\delta^{n-1}\|_{0,h}+\tau\ \|r^n\|_{0,h}).$$

递推得

$$\|\delta^n\|_{0,h}\leqslant C(\|\delta^0\|_{0,h}+\tau\sum_{j=1}^{n}\ \|r^j\|_{0,h}).\qquad(2.26)$$

利用范数的等价性得

$$\|\delta^n\|_0\leqslant C(\|\delta^0\|_0+\tau\sum_{j=1}^{n}\ \|r^j\|_0).\qquad(2.27)$$

再估计 $\|r^j\|_0$，令 $r^j=r_1^j+r_2^j$，其中

$$r_1^j=\bar{\partial}_tP_hu(t_j)-\bar{\partial}_tu(t_j)=\frac{1}{\tau}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(P_h-\mathrm{I})u_t\mathrm{d}t,$$

$$r_2^j=\bar{\partial}_tu(t_j)-u_t(t_j)=-\frac{1}{\tau}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_{j-1})u_{tt}\mathrm{d}t.$$

由椭圆投影算子定义可知

$$\sum_{j=1}^{n}\|r_1^j\|_0\ \leqslant\ \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n}\ \int_{t_{j-1}}^{t_j}Ch^2\ \ \|u_t\|_3\mathrm{d}t\ =C\tau^{-1}h^2\int_0^{t_n}\ \|u_t\|_3\mathrm{d}t,\qquad(2.28)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\ \|r_2^j\|_0\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\ \|u_{tt}\|_0\mathrm{d}t\leqslant\tau\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|_0\mathrm{d}t.\qquad(2.29)$$

再由椭圆投影算子定义可得

$$\|\delta^0\|_0\leqslant\|P_hu_0-u_0\|_0+\|u_0-u_{0h}\|_0\leqslant Ch^2\ \|u_0\|_3+\|u_0-u_{0h}\|_0.\qquad(2.30)$$

将(2.28)～(2.30)式代入(2.27)式得

$$\|\delta^n\|_0\leqslant C\{\|u_0-u_{0h}\|_0+h^2[\|u_0\|_3+\int_0^{t_n}\|u_t\|_3\mathrm{d}t]+\tau\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|_0\mathrm{d}t\}.\qquad(2.31)$$

联合(2.18)式和(2.31)式可知定理 2.2 得证

定理 2.3 令 u 和 $\{u_h\}$ 分别是问题(1.2)式和(1.1)式中的后 Crank-Nicolson 有限体积元格式的解，则有 L^2 误差估计

$$\|u(t_n)-u_h^n\|_0\leqslant C\{\|u_0-u_{0h}\|_0+h^2[\|u_0\|_3+\int_0^{t_n}\|u_t\|_3\mathrm{d}t]+\tau^2\int_0^{t_n}\|u_{ttt}\|_0\mathrm{d}t\},n=0,1,2,\cdots,M.$$

参考文献:

[1] Li R H, Chen ZH Y, Wu Wei. Generalized difference methods for differential equations(Numerical analysis of finite volume methods)[M]. New York: Marcel Dekker, 2000.

[2] Li Y H, Li R H. Generalized difference methods on arbitrary quadrilateral networks[J]. Journal of Comutational Mathematics, 1999, 17(6): 653-672.

[3] 吕俊良. 四边行网格上有限体积元法的 L^2 误差估计及超收敛[D]. 长春:吉林大学, 2009.

[4] 李永海. 抛物方程的一种广义差分法[J]. 计算数学, 2002, 24(4): 487-500.

[5] 贾闽惠, 刘小华. 四边形网格上抛物型方程广义差分法的 L^2 模误差估计[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2006, 43(2): 285-292.

[6] 甘小艇. 抛物型方程和双曲型方程的有限体积元法[D]. 桂林:桂林电子科技大学, 2010.

[7] 王烈衡, 许学军. 有限元方法的数学基础[M]. 北京:科学出版社, 2004.

[8] 李荣华, 陈仲英. 微分方程广义差分法[M]. 长春:吉林大学出版社, 1994.

(责任编辑:尹 闯)