DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.2013.02.017

广西科学院学报 2013,29(2):145～146
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol.29,No.2 May 2013

一种数学分析课程中的“情景再现”解题方法*

“Reappearance of Scene” in Mathematical Analysis

茹 凯,倪 黎
RU Kai,NI Li

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)
(College of Mathematical Science,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:由《数学分析》教材中的一个例题得到启发,提出数学分析课程中一种常见的“情景再现”解题方法,并举例说明它在实际解题中的作用.

关键词:课程教学 数学分析 情景再现 建议
中图法分类号:G64 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2013)02-0145-02

Abstract:Inspired from an example in the “Mathematical Analysis” textbook, a common problem-solving method called “reappearance of scene” method in mathematical analysis is stated and the function of this method in practical problem-solving is exemplified.

Key words:course teaching,mathematical analysis,reappearance of scene,suggestion

“情景再现”是播音主持等传媒学科中的一个术语,是一种想象和联想的活动,在语文、政治、历史等学科中经常出现.例如,学习李白的《静夜思》时,我们结合诗句,通过积极的联想,脑海中就会出现一幅由深秋、明月和孤独的诗人构成的写意山水画,这样仿佛能感觉到那沁人的秋凉等意境,这时候读者再去理解诗意,自然是水到渠成的事情.通过“情景再现”,能使所学内容生动、直观,从而在较短的时间内掌握所学内容,提高学习效率.但在数学相关课程的学习中,特别是在数学分析课程的学习中,还未见有人提出过“情景再现”的解题方法.本文提出数学分析课程中的“情景再现”法,并举例说明它在实际解题中的作用.

1 “情景再现”解题方法

在《数学分析》上册188页中,有这样一道例题:求 $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.教材中给出的解法是构造二元一次方程组,然后解方程组求得积分.然而值得思考的是,若题目中没有出现 $I_2=\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$,只要求解 $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$,这时应该怎么计算.经过思考,可以用以下方法解出:

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\cos bx\,\mathrm{d}(e^{ax})=\frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx+b\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bx\,\mathrm{d}(e^{ax})=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}(e^{ax}\sin bx-b\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I_1,$$

将上式移项,合并同列项得

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}I_1=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2},$$

故 $I_1=\dfrac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C$.

此解题过程中用到了一种“情景再现”的思想,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=g(x)+\lambda\int f(x)\mathrm{d}x,$$

收稿日期:2013-01-07
修回日期:2013-02-15
作者简介:茹 凯(1987-),男,硕士研究生,主要从事微分方程研究工作。
*广西教育厅科研项目(201012MS025);广西壮族自治区研究生教育创新计划项目(2011106020701M37)资助。

其中 $\lambda \neq 1$. 这样从上式可得 $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{g(x)}{1-\lambda} + C$.

一般来讲,在计算过程中,出现与所求项同类的项时,须经移项合并同类项后方能完成求解,这种方法我们称之为"情景再现"法.

2 解题实例

例 1 计算不定积分 $I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\mathrm{d}x$.

解法 1 看到被积函数含有根号,我们首先想到的是去根号. 令 $x = a\tan t$,则有

$$I = \int a\sec t d(a\tan t) = a^2 \int \sec^3 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right|) + C.$$

解法 2 用分部积分法,结合"情景再现",有

$$I = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x - I,$$

则 $I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$. 因为 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$,故

$$I = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right|) + C.$$

解法 1 的计算简单,但是 $\int \sec^3 t\mathrm{d}t$ 的计算比较困难,需要利用积分表中的公式多次迭代才能求出;解法 2 通过"情景再现",把所求积分转化为熟悉的积分,容易计算.

例 2 计算定积分 $\int_0^\pi e^x \sin^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^\pi e^x \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^\pi - 1) - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\cos 2x\mathrm{d}x$.

又因为 $\int_0^\pi e^x\cos 2x\mathrm{d}x = e^x\cos 2x\,|_0^\pi + 2\int_0^\pi e^x\sin 2x\mathrm{d}x = (e^\pi - 1) + 2\int_0^\pi e^x\sin 2x\mathrm{d}x = (e^\pi - 1) + 2e^x\sin 2x\,|_0^\pi - 4\int_0^\pi e^x\cos 2x\mathrm{d}x$.

再由"情景再现"法,得到 $\int_0^\pi e^x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(e^\pi - 1)$,故 $\int_0^\pi e^x \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)$.

3 结束语

我们在此提出的"情景再现"法,表面上看起来与传媒学中的情景再现毫不相干,也与语文、政治、历史学科中的情景再现没有关系. 但认真思考发现,他们中间都包含了想象和联想的思想. 当我们面对一个数学问题时,为了便于下手解决,我们经常第一步,就是通过想象和联想,设法转化问题形式,使得改换后的形式比较熟悉,甚至出现所求项,能和已知的知识联系起来,使面貌生疏的问题转化为面貌熟悉的问题,这样就可以利用已知的知识去解决问题.

"情景再现"也是一种能力,需要通过学习和工作实践去培养,一个人的知识越丰富,他的想象和联想的范围会越广阔,因而"情景再现"能力也越强. 优秀的数学工作者,大都善于想象和联想,能掌握转化问题的技巧. 而这种技巧的获得就要求我们积累不同学科的知识、多思考它们之间的联系、多总结经验. 只要善于想象和联想,逐渐培养自己"情景再现"的能力,就会在学习和教学中有所突破,有所创新,有所发现.

参考文献:

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析上册[M]. 第 3 版. 北京:高等教育出版社,2001.

[2] 叶国菊,赵大芳. 数学分析学习与考研指导[M]. 北京:清华大学出版社,2009.

[3] 徐利治. 数学分析的方法及例题选讲[M]. 大连:大连理工大学出版社,2007.

(责任编辑:尹 闯)